Г. А. Медведев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

Часть I.

РИСКИ
ИЗ-ЗА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ
ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Медведев Г. А. Математические модели финансовых рисков. [Электронный ресур]: Учебное пособие: В 2 ч. Ч.1. Риски из-за неопределенности процентных ставок. — Электрон. текст. дан. (14,6 Мб). — Мн.: “Электронная книга БГУ”, 2003. — Режим доступа: http://anubis.bsu.by/publications/elresources/AppliedMathematics/medvedev4.pdf . — Электрон. версия печ. публикации, 1999. — PDF формат, версия 1.4 . — Систем. требования: Adobe Acrobat 5.0 и выше.

МИНСК

«Электронная книга БГУ»

2003

www.elbook.bsu.by
elbook@bsu.by

Г. А. Медведев

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

Часть I. Риски из-за неопределенности процентных ставок

Минск
Белгосуниверситет
1999

УДК 336: 519.6

Рецензенты: Кафедра прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета, зав. кафедрой Н. И. Холод, доктор экономических наук, профессор.

Член-корреспондент НАН РБ А. Д. Закревский, доктор технических наук, профессор.

Медведев Г. А.

Математические модели финансовых рисков. В двух частях. Часть 1. Риски из-за неопределенности процентных ставок. – Мн.: Белгосуниверситет, 1999. – 257 с.: ил.

Излагаются основные разделы курса «Математические модели финансовых рисков», касающиеся рисков инвестирования на финансовом рынке, который преподается студентам специальностей «Экономическая кибернетика» и «Актуарная математика». Материал может быть использован для чтения спецкурсов по специальностям «Прикладная математика», «Финансы и кредит». Основное внимание уделяется проблеме определения цен финансовых инструментов, включая акции, облигации и финансовые производные, в условиях случайного поведения процентных ставок.

Для студентов физико-математических специальностей университетов, аспирантов и магистров экономических и технических вузов, специалистов народного хозяйства, работающих в области финансов.

УДК 336: 519.6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Использование математических моделей в финансовом анализе стало обычной практикой, начиная с 70-х годов, когда произошли революционные события в развитии финансовых рынков. Существенные изменения затронули как финансовую практику, так и математическую теорию финансового рынка. Что касается практики, то в апреле 1973 г. на одной из наиболее крупных фондовых бирж, чикагской бирже, была открыта торговля новыми финансовыми инструментами – опционами на акции. Эти финансовые инструменты оказались настолько привлекательным механизмом инвестирования, что уже спустя 10 лет на чикагской бирже заключалось около 80 миллионов контрактов в год, а еще через два года и этот показатель был удвоен. Учитывая, что эти цифры относятся только к одной бирже и только к одному финансовому инструменту, можно утверждать, что число участников финансовых сделок резко возросло и продолжает увеличиваться.

Понятно, что для успешной работы на финансовом рынке, кроме опыта, необходимо обладать соответствующими знаниями, чтобы принимать обоснованные решения. Другими словами, при возрастающем интересе к проблемам эффективного инвестирования на финансовом рынке нужна была соответствующая теория. Случилось так, что в том же 1973 г. были опубликованы основополагающие статьи Фишера Блэка и Майрона Шоулса (*F. Black & M. Scholes*), а также Роберта Мертона (*R. Merton*) по вопросам определения цен финансовых инструментов. Эти статьи имели такое же революционное значение в математической теории финансового рынка, как и появление опционов на самом финансовом рынке. Как признание заслуг этих ученых, Королевская академия наук Швеции присудила им в 1997 г. Нобелевскую премию «за разработку совершенно нового метода определения стоимости опциона». Появление указанных работ было сильнейшим импульсом развития стохастической теории финансовой математики вообще и инвестирования в ценные бумаги на финансовом рынке в частности.

По своей природе цены на рынке всегда определяются динамично, согласно спросу и предложению. При строгом рассмотрении эта динамика имеет случайный характер, что влечет за собой неопределенность состояния рыночных цен (а для финансового рынка это эквивалентно состоянию процентных ставок) и неопределенность будущих последствий принимаемых финансовых решений. Опасность принять решение, которое повлечет финансовые потери (или недостаточно высокие доходы) в будущем, называется финансовым риском. Чтобы принимать финансовые решения без такого риска или на заданном уровне его величины, в настоящее время требуется достаточно серьезное обоснование такого решения. Здесь не обходится без математических расчетов, а следовательно, и без математических моделей финансовых рисков. Поэтому проблематика финансовых рисков является очень актуальной для финансовых аналитиков.

Сказанное выше является очевидным и понятным для ситуации, сложившейся в странах, где финансовые рынки функционируют уже давно и использование таких финансовых инструментов, как ценные бумаги, практически вошло в жизнь каждого человека. В странах же бывшего Советского Союза рыночные отношения до сих пор еще только оформляются, и финансовый рынок не является исключением. Развитие финансового рынка требует квалифицированных специалистов, которые могли бы помогать инвесторам принимать обоснованные решения на минимальном уровне риска. Поэтому в вузах начата подготовка таких специалистов, открываются соответствующие специальности.

Настоящее учебное пособие подготовлено на основе курсов лекций по финансовой математике, которые автор в течение пяти лет читал на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета для студентов, обучающихся по специальностям «Актуарная математика», «Экономическая кибернетика» и «Прикладная математика». Поскольку на русском языке не существует не только учебников по стохастической финансовой математике (точнее, они не известны автору), но и других книг на эту тему, автору пришлось собирать материал в основном по статьям иностранных авторов. В какой-то мере такой подход будет полезным и для читателя, поскольку при изложении математических моделей автор учебника использовал оригинальные работы самих авторов этих математических моделей. Список книг и статей, на основе которых составлено учебное пособие, приводится в списке основной литературы в конце книги.

Учебное пособие предполагает знание математики в том объеме, которым владеют студенты математических и физических специальностей. Для тех, кто знает математику в объеме, преподаваемом в экономических и технических вузах, необходимые математические сведения даются в математическом дополнении к данному пособию. Поскольку используемая в финансовой математике терминология на русском языке еще не устоялась, в тексте учебника основные термины приведены и на английском языке.

Автор надеется, что учебное пособие будет полезно не только студентам, изучающим стохастические методы финансовой математики, но и специалистам, которые по роду своей работы сталкиваются с анализом финансовых решений. Автор с благодарностью примет все замечания и предложения, появившиеся у читателей книги.

Доктор физико-математических наук,
профессор Г. А. Медведев.
ФПМИ, *Белгосуниверситет*,
пр. Ф. Скорины, *4*, *220050*, *Минск.*

ВВЕДЕНИЕ

Рыночную экономическую систему можно описывать многими способами. С формальной точки зрения рынок является местом, где осуществляется движение товаров (и услуг) от производителя (или владельца) к покупателю. Движущими факторами на рынке являются естественные желания участников рынка получить прибыль (для производителей) или удовлетворить потребность (для покупателей). Заметим, что в общем случае потребностью может являться также и получение прибыли (как это имеет место на финансовых рынках). Общей категорией, позволяющей описывать рыночные отношения, служит понятие *актива*, под которым мы будем понимать некоторую собственность, используемую для получения прибыли. Одним из способов описания рыночной экономики является ее представление в виде совокупности двух рыночных систем: рынок реальных активов и услуг и рынок финансовых активов.

АКТИВЫ И РЫНКИ

Реальными активами называют то, что является осязаемым (пища, одежда, сырье, оборудование, здания и т. д.). Услуги представляют собой неосязаемые активы (ремонт, лечение, консультации по юридическим или финансовым вопросам и т. п.). Источниками этих активов являются естественные и трудовые ресурсы экономики. Люди, занятые в экономике, свои способности трудиться и творить реализуют в производстве товаров и оказании услуг, имеющих общественную потребность. Система цен управляет операциями на рынке реальных активов и услуг. Общество выражает свои потребности путем согласия заплатить ту или иную цену за продукцию или услуги. Если эта продукция или услуги могут быть произведены и продаются с прибылью, общественные потребности удовлетворяются. Все это и происходит на *рынке реальных активов и услуг*. Большинство продуктов и услуг, которые покупаются на таком рынке, создаются и предлагаются на основе предпринимательской деятельности. Предпринимательская деятельность, в свою очередь, требует наличия капитала, т. е. финансовых ресурсов, необходимых для приобретения оборудования, сырья и оплаты труда. Предприниматели вынуждены получать капитал из различных источников, включая банки и другие механизмы, и чаще всего получать деньги взамен долговых обязательств. Это делается на финансовых рынках. Поэтому жизнеспособная экономика не может существовать без рынка денег и капитала, то есть *рынка финансовых активов*.

Финансовым активом является свидетельство (финансовый инструмент), обеспечивающее получение денег от юридического или физического лица. Например, некто может занять деньги у другого лица, дав ему расписку. Такая расписка является финансовым активом, которым кредитор (заимодавец, инвестор) владеет, и представляет заемщику (должнику) для оплаты с прибылью, согласованной при выдаче расписки. С точки зрения заемщика, такая расписка является финансовым обязательством. Описанная ситуация – это простейший финансовый контракт, который заключается в момент выдачи расписки и исполняется в (более поздний) момент ее оплаты, а сама расписка является простейшей формой *ценной бумаги*. Многими финансовыми активами (ценными бумагами), такими, как акции или облигации, выпускаемыми частными компаниями или корпорациями, а также облигациями государственных учреждений торгуют на организованной основе. После того как компания выпустила акции, владелец акции может, в свою очередь, продать ее другому. Действующий рынок акций (фондовый рынок) делает продажу акций более удобной для компании, увеличивающей свой акционерный капитал, гарантируя инвесторам, что при необходимости приобретаемые ими акции компании могут быть проданы другим инвесторам. Приобретение акций непосредственно у компании имеет место на *первичном рынке*, в то время как торговля акциями между инвесторами происходит на *вторичном рынке*. Финансовые рынки обычно разбиваются на два типа: денежные рынки и рынки капитала. *Денежный рынок* (*money market*) – это рынок для краткосрочных долговых инструментов. *Рынок капитала* (*capital market*) является рынком для долгосрочных долговых инструментов и акций, выпускаемых компаниями.

В одних случаях как на рынке товаров и услуг, так и на рынке финансовых активов покупатели и продавцы требуют, чтобы основные товары или ценные бумаги доставлялись им немедленно или вскоре после заключения контракта. Платежи обычно делаются сразу же, хотя иногда используются кредиты. Такие рынки называются *спот-рынками* (*spot-market*). Как только продажа состоялась, и платежи исполнены, товары или ценные бумаги доставляются покупателю. В других случаях товары или ценные бумаги должны быть поставлены в более позднее время. При этом существуют формы рыночных отношений, когда покупатель или продавец имеет право решать, исполнять ли покупку (продажу). Такие типы контрактов реализуются на *опционных, форвардных или фьючерсных рынках*. *Финансовый контракт* является соглашением между двумя сторонами (покупателем и продавцом), в котором каждая сторона дает что-либо другой в согласованных размерах и в согласованное время. Покупатель выступает в роли инвестора, а продавец – в роли должника. При этом покупатели контракта стараются купить как можно дешевле, а продавцы контракта стремятся продать как можно дороже.

РИСК И ПРИБЫЛЬ

Обычно термин *финансовый риск* понимается как опасность понести потери в результате исполнения финансового контракта. Здесь есть два аспекта. Во-первых, само понятие опасности предусматривает, что существует только угроза, возможность потери, которая не обязательно реализуется. Поэтому налицо неопределенность результата. Во-вторых, финансовая деятельность чаще всего протекает на финансовых рынках и состоит в заключении и исполнении финансовых контрактов, которые могут принести прибыль или нанести убытки. Таким образом, финансовый риск является качественной характеристикой состояния рынка, когда принимается финансовое решение, результат которого не является абсолютно точно предсказуемым. Однако это не означает, что не существует каких-либо способов количественного анализа финансовых рисков. Они имеются, и они довольно разнообразны. Дело в том, что, как мы уже видели, существует не только много типов финансовых контрактов, но и самих финансовых рынков, где заключаются и исполняются эти контракты. А это приводит к тому, что количественные факторы, определяющие степень риска, могут существенно меняться в зависимости как от вида финансового рынка, так и от характера финансового контракта. Так что существует большое разнообразие количественного описания (или, что то же самое, математических моделей) финансовых рисков, а вместе с тем и способов их анализа. Определим некоторые понятия, которые являются общими при анализе эффективности исполнения финансовых контрактов.

Прибыль (*доход, отдача, return*) является количественной мерой исполнения инвестиции. Она представляет собой увеличение средств инвестора, которое произошло в результате инвестиции, и обычно выражается в процентах к инвестированному капиталу. В случае акций прибылью является изменение цены плюс дивидендный доход (дивиденд). Одной из основных черт инвесторов является их стремление увеличить свое состояние. Эта черта выражается в желании получать по возможности наибольшую прибыль. Однако на реальном рынке получение большей прибыли обычно сопровождается большим риском, т. е. большей неопределенностью получения этой прибыли. Естественным правилом инвесторов является стремление избегать рискованных ситуаций в том случае, когда существует безрисковая ситуация, сулящая эквивалентную ожидаемую прибыль. Однако не всегда можно избежать неопределенности. К счастью, конкурентная природа финансовых рынков дает возможность инвесторам определять степень риска при инвестировании. Ожидаемая добавочная прибыль, зарабатываемая при инвестировании контракта с повышенным риском, называется *рисковой премией* (*премией за риск*, *risk premium*).

Какие же другие факторы влияют на привлечение инвесторов и их ожидаемую прибыль? Рассмотрим некоторую компанию, функционирующую без риска. Захотят ли люди инвестировать свои деньги в эту компанию, если они не получат никакой прибыли? Конечно, нет. Они будут требовать минимальной прибыли, которая компенсировала бы им то, что они отказались использовать деньги на свои нужды на время инвестиции. Такая прибыль называется *ставкой, свободной от риска* (*risk-free rate*), и является ценой возможности получения инвестиции. Прибыль инвесторов, которую они ожидают, состоит из ставки, свободной от риска, и рисковой премии. С увеличением риска ожидаемая прибыль инвесторов обычно возрастает, в то время как ставка, свободная от риска, будет оставаться постоянной. Отсюда следует, что увеличение прибыли инвесторов при увеличении риска обязано увеличению рисковой премии. Математически выражение этой количественной закономерности можно формализовать только после того, как будут формально определены факторы риска. Теперь поясним, почему необходимо измерять риск. Важным понятием является *соотношение между риском и прибылью* (*risk-return trade-off*). Соотношение между риском и прибылью используется инвесторами, когда они стремятся максимизировать прибыль, подвергаясь минимальному уровню риска. Если доход от акций повышается при переходе на более высокий уровень риска, некоторые инвесторы могут решить, что слишком рискованно иметь такие акции, и станут продавать их, а это понизит цену акций. Новые инвесторы, приобретая эти акции, будут ожидать, что получат более высокую прибыль, покупая их по более низкой цене. Финансовые рынки являются эффективными, когда производится дискриминация фирм, имеющих различные уровни риска. В фирмы с низким уровнем риска будет идти обильное инвестирование, но за умеренные выплаты. Фирмы с высоким уровнем риска могут столкнуться с трудностью при увеличении акционерного капитала и будут вынуждены выплачивать больше. Рынки, где уделяют много внимания ценообразованию финансовых инструментов, которыми там торгуют, обычно называют эффективными.

Рыночная эффективность является характеристикой рынка, когда цены финансовых инструментов, которыми там торгуют, правильно отражают их экономическую стоимость для инвесторов. На эффективном рынке цены изменяются случайно и инвесторы не могут наверняка получить прибыль выше той, которая будет компенсацией за риск, которому они подвергаются. Однако естественно предположить, что рынки с большим объемом статистических данных относительно их работы будут эффективными. Рыночная эффективность является естественным следствием рационального поведения инвесторов, которое и принимается в качестве адекватной модели.

Арбитраж (*arbitrage*) является типом сделок, в которых инвестор имеет возможность получать безрисковую прибыль, когда на рынке один и тот же товар продается по двум различным ценам. Тогда инвестор (арбитражор) покупает товар по более низкой цене и продает его по более высокой. Эта торговая стратегия является привлекательной, и многие инвесторы тратят много времени для поиска таких арбитражных возможностей. Если акция некоторой компании продается на одной бирже по низкой цене, а на другой бирже по высокой, то инвестор имеет возможность купить акцию по низкой цене на первой бирже и продать ее по высокой цене на второй бирже. Понятно, что желающих получить такую прибыль появится много, а массовый спрос на рынке всегда повышает цену, в то время как массовое предложение будет понижать ее. Поэтому на первой бирже цена рассматриваемой акции будет повышаться, в то время как цена акции на второй бирже будет падать. И это будет происходить до тех пор, пока цены акции на обеих биржах не станут равными. При современных способах информированности участников рынка этот процесс происходит очень быстро, так что арбитражные возможности не могут существовать на рынке какое-то заметное время. Поэтому обычно принимается, что одинаковые товары на рынке не могут продаваться и покупаться по разным ценам. Это называется *законом одной цены* (*low of one price*). Большинство рыночных математических моделей, разрабатываемых в настоящее время, исключает возможность арбитража. Такие модели (и теории) называются *арбитражными*.

ПРОЦЕНТЫ И ИНФЛЯЦИЯ

Материал книги излагается в предположении, что читатель уже знаком с основными понятиями финансовой математики, т. е. со способами описания и закономерностями изменения стоимостей. Однако поскольку эти понятия и закономерности являются основными при принятии решений участниками финансовых контрактов, мы напомним их для удобства читателей.

Процентные деньги (*процент*, *interest*) – денежная компенсация инвестору за использование инвестированных им денег. *Процентная ставка* (*interest rate*, *rate of interest*) – это денежная сумма, заработанная путем инвестирования одной денежной единицы в начале периода и выплачиваемая в конце этого периода, который называется *периодом начисления процентов* или *периодом конверсии*. Когда длительность периода конверсии уменьшается до нуля, то говорят, что процент начисляется непрерывно. Этот способ начисления процентов обычно используется при построении математических моделей процентных ставок для анализа изменения стоимости ценных бумаг на финансовом рынке. Поэтому и в настоящем учебнике считается, что проценты начисляются непрерывно.

центная ставка (темп роста инвестированных денег) считается равной сумме реальной процентной ставки (темпа роста покупательной способности) и темпа инфляции. Это соотношение известно как *формула Фишера* (в наиболее простом виде).

Природа финансового рынка такова, что любая сумма денег, используемая рационально, с течением времени увеличивает состояние владельца этой суммы. Поэтому сравниваемые денежные суммы должны всегда привязываться к одному и тому же моменту времени, моменту сравнения. Технически это делается при помощи введения функций дисконтирования (дисконтирующих множителей), которые на основе согласованной процентной ставки определяют *настоящие стоимости* (*present value*) денежных сумм, ценных бумаг или *потоков платежей* (*cash flow*), т. е. стоимости этих сумм, бумаг или потоков на момент сравнения. В этом смысле такие денежные суммы, ценные бумаги или потоки платежей называют *дисконтируемыми* (*discount*). Одним из основных объектов исследования в настоящем учебнике является *дисконтируемая облигация* (*discount bond*), которая хотя и представляет собой достаточно простой актив, но ее анализ содержит все основные элементы анализа практически любых других ценных бумаг, поскольку более сложные финансовые инструменты могут быть определены как соответствующий портфель дисконтируемых облигаций.

ЦЕННЫЕ БУМАГИ И СТАВКИ ДОХОДНОСТИ

Облигация (*bond*) является формой финансового контракта, в которой эмитент (заемщик) выпускает (продает) долговые расписки инвесторам. Контракт обязывает эмитента делать определенные платежи владельцу облигации в соответствующие даты. Обыкновенная *купонная облигация* (*coupon bond*) обязывает эмитента делать полугодовые платежи процентов, называемые купонными платежами, владельцу облигации в течение срока действия облигации и затем выплатить дополнительно *номинальную стоимость* (*par value*, или, что то же самое, *лицевую стоимость*, *face value*) в дату погашения облигации. Однако иногда выпускаются *бескупонные облигации* (*облигации с нулевыми купонами*, *zero-coupon bonds*), по которым не делается купонных платежей. В этом случае инвесторы получают номинальную стоимость облигации в дату погашения, но не получают никаких процентных платежей до этой даты.

Ставка доходности, или просто *доходность* (*yield interest rate*, *yield rate*) актива (в частности, облигации), определяется как процентная ставка, при которой настоящая стоимость доходов от инвестиции равна настоящей стоимости инвестиционных взносов. В финансовой литературе ставка доходности часто называется *внутренней нормой прибыли* (*internal rate of return*), так что эти термины взаимозаменяемы. На практике инвестору, который собирается приобрести облигацию, не сообщается обещаемая ставка доходности. Вместо этого инвестор должен использовать цену облигации, дату погашения и купонные платежи, чтобы сделать вывод о доходе, который он получит в течение срока действия облигации. *Доходность до погашения* (*yield to maturity*) является средней ставкой доходности, которая будет обеспечена облигацией, если она будет куплена инвестором и он будет владеть ею весь срок действия с момента покупки и до даты *погашения* (*maturity*).

На финансовых рынках могут возникать ситуации, когда компания, выпустившая акции или облигации, оказывается неспособной своевременно выполнить свои обязательства по выплате основного капитала или процентов по ценным бумагам. Такие ценные бумаги таят в себе *риск неуплаты* (*default risk*). В настоящем учебнике будут рассматриваться только ценные бумаги, которые свободны от этого недостатка, т. е. *ценные бумаги, свободные от неуплаты* (*default-free security*). Реально такими свойствами обладают только правительственные ценные бумаги государств со стабильной экономикой.

ВРЕМЕННАЯ СТРУКТУРА ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

При определении цен облигаций ключевую роль играет так называемая временная структура процентных ставок. Формально *временная структура* (*term structure*) процентных ставок – это доходность до погашения свободных от неуплаты дисконтируемых облигаций, рассматриваемая как функция даты (или срока) погашения. Графическая зависимость доходности облигации от срока ее погашения известна как *кривая доходности* (*yield curve*). Обычно в финансовой литературе не делают различия в терминах *временная структура* и *кривая доходности*, и они являются взаимозаменяемыми. Временная структура процентных ставок для свободной от неуплаты дисконтируемой облигации уже продолжительное время интересует экономистов. Нахождение соотношения между процентными ставками свободных от неуплаты облигаций различных сроков погашения и сопоставление этих процентных ставок с другими экономическими переменными (например, реальной процентной ставкой и темпом инфляции) являются наиболее часто встречающимися проблемами при составлении финансовых контрактов.

Цена облигации (*price of bond*) определяется как настоящая стоимость потоков платежей этой облигации. В простейшем случае при определении цен облигаций используется одна и та же процентная ставка для дисконтирования потоков платежей всех облигаций. Подходящей для этого процентной ставкой является доходность свободной от неуплаты ценной бумаги с той же датой погашения, что и облигация, плюс соответствующая рисковая премия. Однако различные облигации могут иметь различные расписания купонных платежей. Различие потоков платежей по облигациям не позволяет использовать одинаковые процентные ставки для их дисконтирования. В связи с этим каждый поток платежей приходится дисконтировать, используя процентную ставку, соответствующую временному периоду выплат этого потока платежей и представляя выплаты по основной облигации как пакет платежей по бескупонным облигациям, где датой погашения каждой бескупонной облигации пакета является дата купонного платежа или дата погашения основной облигации. Чтобы определить стоимость каждой бескупонной облигации такого пакета, нужно знать доходность бескупонной свободной от неуплаты ценной бумаги с той же датой погашения. Эта доходность называется *спот-ставкой* (*spot-rate*, или, что то же самое, *бескупонной доходностью*, *zero-coupon yield*), а функциональная зависимость спот ставки от даты (или срока) погашения называется *кривой спот-ставок* (*spot-rate curve*, или *кривой бескупонной доходности*, *zero-coupon yield curve*).

Поскольку бескупонные свободные от неуплаты ценные бумаги выпускаются с очень ограниченным набором сроков погашения (не более одного года), только в редких случаях можно непосредственно определить нужную спот-ставку. Поэтому кривые спот-ставок обычно находятся теоретически. При определенных предположениях информацию, получаемую из теоретической кривой спот ставок, можно экстраполировать на более длительный срок. Такой информацией служат рыночные ожидания будущих процентных ставок. Спот-ставка является процентной ставкой на инвестицию, не предполагающую промежуточных платежей, на период времени, начинающийся в настоящий момент. Когда изменение процентных ставок в будущем точно известно и цены всех облигаций определяются справедливо, они будут обеспечивать одинаковые годовые ставки доходности. Процентные ставки, определяемые на базе спот-ставок для периодов времени в будущем, называются *форвардными процентными ставками* (*forward interest rate*). Форвардные процентные ставки рассчитываются из соображений приравнивания полного дохода от долгосрочной облигации доходу от последовательного использования соответствующего числа краткосрочных облигаций в течение срока действия этой долгосрочной облигации. Форвардная ставка для периода, начинающегося в настоящее время, совпадает со спот ставкой. Форвардные ставки выводятся также из временной структуры процентных ставок.

Пожалуй, первой и простейшей теорией временной структуры является *гипотеза несмещенных ожиданий* (*unbiased expectations hypothesis*) Фишера (Fisher, 1896). Обычный вариант этой гипотезы утверждает, что форвардные ставки равны соответствующим спот ставкам, которые ожидаются на рынке в будущем. Другими словами, долгосрочные процентные ставки являются средними от ожидаемых будущих краткосрочных ставок и рисковые премии равны нулю. Существуют версии гипотезы ожиданий, которые берут за основу другие рыночные предположения.

В условиях гипотезы несмещенных ожиданий получается, что краткосрочные и долгосрочные контракты дают одинаковый процент, при не изменяющихся рыночных обстоятельствах это будет одинаково приемлемо для инвесторов. Однако рыночные обстоятельства всегда меняются со временем, поэтому, опасаясь, что эти изменения не будут в пользу инвесторов, последние предпочтут заключать краткосрочные контракты. Однако для другой стороны, участвующей в контракте, желательно иметь долгосрочные соглашения. Поэтому для привлечения инвесторов форвардные ставки следует увеличивать по сравнению с ожидаемыми краткосрочными ставками. Эта разница будет компенсировать инвесторам последствия неопределенности при заключении долгосрочных контрактов, и называется она *премией ликвидности* (*liquidity premium*). Под *ликвидностью* (*liquidity*) обычно понимают возможность продать без всяких затруднений актив по вполне определенной цене. Поскольку долгосрочные ценные бумаги имеют большую цену риска, они считаются менее ликвидными в этом контексте и должны предусматривать указанную премию. Теория временной структуры, учитывающая эту особенность рыночных отношений, называется *теорией предпочтения ликвидности* (*liquidity preference theory*) и основана на гипотезе о превышении форвардных ставок над ожидаемыми краткосрочными ставками.

Как гипотеза несмещенных ожиданий, так и теория предпочтения ликвидности неявно подразумевают, что активы различных сроков погашения являются потенциально взаимозаменяемыми. При этом доходности краткосрочных и долгосрочных контрактов должны отличаться не более чем на справедливо определенную премию ликвидности. Справедливая премия может быть определена на рынке только в условиях равновесия, и ее определение является затруднительным как для инвесторов, так и для их партнеров по контрактам. Поэтому рынок ценных бумаг имеет тенденцию распадаться на отдельные сегменты, внутри которых торгуют активами со сроками погашения одного порядка, т. е. на рынки краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных активов, которые существуют независимо, и процентные ставки на них определяются независимо. Поэтому временная структура процентных ставок определяется для каждого сегмента в отдельности. Такой подход при определении временной структуры процентных ставок называется *теорией сегментации рынка* (*market segmentation theory*).

УПРАВЛЕНИЕ РИСКАМИ

Модели управления риском используются для выбора портфелей с определенным подбором различных рисков. Формально первичной функцией финансового рынка является передача риска. Для каждого типа риска механизм передачи определяет рыночные цены, которые уравнивают спрос и предложение. Хотя это означает, что при равновесии все риски оцениваются справедливо, так, чтобы все активы имели одинаковую ожидаемую мгновенную ставку доходности, нельзя считать, что все активы одинаково хороши для всех инвесторов. Таким образом, в соответствии с характером своего бизнеса некоторые инвесторы предпочитают текущий доход будущей отдаче. Инвесторы, которые делают ставку на свои субъективные рыночные представления, могут принимать решения с определенным риском, в то время как те, кто не расположен к риску, могут хеджировать свои позиции.

Управление риском касается, во-первых, выбора, какие риски принимать и каких рисков следует избегать. Во-вторых, оно касается оценивания рисков различных активов и, в третьих, составления и поддержания портфелей с определенными характеристиками рисковых доходов. Все три компоненты управления риском являются взаимозависимыми. Мы дадим классификацию различных финансовых рисков и рассмотрим методы управления риском.

Финансовый риск многомерный. Поэтому предпосылкой селекции рисков для представления их в портфеле может быть идентификация вида присутствующего риска. Следующий (неполный) перечень дает представление о разнообразии (многомерности) рисков:

1. Рыночный риск.
2. Риск формы.
3. Риск срока.
4. Риск волатильности.
5. Риск реинвестирования.
6. Валютный риск.
7. Кредитный риск.
8. Риск ликвидности.
9. Риск инфляции.
10. Риск сектора рынка.

В настоящем учебнике мы рассматриваем только риски, связанные со стохастическим поведением процентных ставок, и поэтому остановимся на разъяснении только первых четырех типов риска, которые имеют прямое отношение к предмету нашего изучения.

Цена обычного актива с фиксированным доходом изменяется в обратном направлении изменения процентной ставки: когда процентная ставка повышается (падает), цена актива с фиксированным доходом будет падать (подниматься). Инвестора, который планирует держать актив до погашения, изменения его цены перед погашением не интересуют; однако для инвестора, который мог бы продать актив до даты погашения, увеличение процентных ставок будет означать потерю капитала. Этот риск называется *рыночным риском или риском процентных ставок* и является риском, с которым чаще всего сталкивается инвестор на рынке ценных бумаг. Общепринято характеризовать рынок уровнем доходности государственных краткосрочных ценных бумаг. Чаще всего доходность других активов сравнивается с уровнем доходности таких ценных бумаг и объявляется как «размывание» их доходности. В зависимости от того, какой рынок рассматривается, рыночный риск имеет несколько различающиеся интерпретации. На рынке ценных бумаг традиционной мерой рыночного риска является риск процентной ставки. В общем смысле это риск, вызванный изменениями общего уровня процентных ставок на свободные от неуплат ценные бумаги. Более определенно, это риск, связанный с равномерным увеличением всех свободных от неуплат процентных ставок.

В более общих моделях взаимодействует несколько независимых факторов риска. В этом случае свойства ценных бумаг определяют чувствительность актива к каждому фактору риска. При равновесии общий спрос и предложение для каждого риска должны быть одинаковыми. Каждый фактор риска имеет свою рисковую премию, связанную с ним, и при равновесии доход от актива определяется как сумма по всем факторам. Эта гипотеза является основой *арбитражной теории определения цен* (*arbitrage pricing theory*) активов. По этой гипотезе рыночный риск является просто результатом одного из многих факторов риска, влияние которого измеряется чувствительностью к изменениям став-

ставки доходности портфеля относительно безрисковой процентной ставки на рынке акций или дюрацией на рынке облигаций.

Риск формы кривой доходности характерен для рынка активов с фиксированной доходностью. Он является риском, вызванным неодинаковыми сдвигами процентных ставок доходности на прямые свободные от неуплат ценные бумаги (т. е. изменением формы временной структуры процентных ставок). Риск формы можно определить количественно. Эмпирический анализ доходности ценных бумаг Казначейства США показывает, что для объяснения 98 % изменений временной структуры достаточно учитывать три независимых фактора. Эти факторы характеризуются своим влиянием на форму кривой доходности. Изменения первого фактора подразумевают почти параллельные сдвиги временной структуры, так что его можно представлять как фактор рыночного риска. Изменения второго фактора локально деформируют кривую доходности, в то время как изменения третьего фактора подразумевают изменения кривизны по всей кривой доходности. Вдобавок к этому названные факторы влияют стабильно в течение длительного времени. Это позволяет вычислять чувствительность дохода различных финансовых инструментов к каждому фактору и количественно определять риск формы. Знание количественного значения риска позволяет инвесторам выбирать ценные бумаги так, чтобы рисковать согласно своим представлениям о влиянии изменений временной структуры на доходность активов.

Как будет объяснено позже, цена актива с вложенными опционами зависит от уровня процентных ставок и факторов, которые влияют на стоимость вложенных опционов. Одним из факторов является ожидаемая волатильность процентной ставки. Риск, вызванный тем, что изменение волатильности будет отрицательно влиять на цену актива, называется *риском волатильности.* Риск волатильности наиболее ярко проявляется, когда имеют дело с финансовыми производными, в частности с опционами. Эти инструменты характеризуются высокой степенью асимметрии отдачи. Чем больше волатильность процентной ставки, тем выше цена опциона. Поэтому изменения волатильности имеют основное влияние на опционы даже на рынке, не изменяющемся во всех других отношениях.

Риск волатильности присутствует не только в опционах. Обыкновенные облигации также подвержены риску волатильности. Причина в том, что зависимость между ценой и доходом является выпуклой функцией. Это свойство влечет за собой тот факт, что на цены облигаций падение доходности на единицу влияет сильнее, чем ее увеличение на единицу. Поэтому чем выше волатильность доходности по сравнению с обычным ожидаемым значением, тем выше ожидаемый доход облигации. Этот эффект проявляется тем сильнее, чем более выпуклой функцией выражается зависимость между ценой и доходом, т. е. чем больше срок действия облигации и чем более рассеянным является поток платежей на нее. Подобным образом и чувствительность к волатильности дохода опционов может измеряться величиной положительной выпуклости. В этом смысле волатильность приближенно можно характеризовать выпуклостью функции.

Во многих ситуациях облигация заданного срока погашения используется как альтернатива другой облигации с отличающимся сроком погашения. Делаются поправки, чтобы учесть риски процентных ставок в этих двух облигациях. Однако это регулирование осуществляется в предположении о том, как будут изменяться процентные ставки (или доходности) при различных сроках погашения. Степенью, в которой изменение доходности отличается от этого предположения, измеряется *риск срока погашения*, или *риск кривой доходности*. В общем случае риск кривой доходности более важен при хеджировании, чем при решении проблем самого инвестирования.

В дальнейшем в математических постановках все упомянутые здесь понятия будут строго формально определены.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

1.1. ФИНАНСОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ . МОДЕЛЬ БЛЭКА – ШОУЛСА

Цель настоящего раздела – дать понятие о финансовых инструментах, показать, как определяются их цены, подчеркивая фундаментальную роль, которую играют процентные ставки при определении этих цен. В основном мы здесь считаем, что процентные ставки являются полностью определенными. Исключение составляет текст, описывающий модель Блэка – Шоулса. Эта знаменитая модель, хотя и является стохастической, описывается в этом разделе, во-первых, потому, что она была предложена для определения финансовых производных (а они вводятся здесь и в последующем тексте практически не исследуются) и, во-вторых, потому, что модель Блэка – Шоулса является идеологической основой для рассуждений при определении цен практически всех финансовых активов, рассматриваемых в последующих главах. Поэтому познакомиться с ней и понять идею, на которой она базируется, следует в самом начале изучения математических моделей финансовых рисков.

ФИНАНСОВЫЕ АКТИВЫ

Финансовым активом или просто *активом* (*asset*) мы будем называть собственность, которая приносит проценты. По своей сути финансовые активы являются *финансовыми контрактами*, которые заключаются между двумя сторонами. Одна из сторон выплачивает определенный соглашением поток платежей (т. е. выплачивает согласованные суммы в согласованные даты) и взамен получает другой поток платежей, который тоже состоит из согласованных контрактом сумм, выплачиваемых в согласованные даты. Суммы второго потока платежей больше сумм первого потока на величину процентов. В справедливом контракте настоящая стоимость обоих потоков платежей при согласованной процентной ставке одинакова. Однако так будет, если процентная ставка, используемая в контракте, совпадает с безрисковой процентной ставкой финансового рынка. Если же процентная ставка, используемая в контракте, не равна безрисковой процентной ставке, то контракт не является справедливым и одна из сторон понесет финансовые потери. Таким образом, если безрисковая ставка неизвестна при заключении контракта, возникает опасность понести финансовые потери из-за неопределенности процентной ставки. Простейшим контрактом является соглашение, по которому одна сторона, *инвестор*, в исходную дату контракта (часто говорят, в настоящее время) выплачивает определенную сумму и без всяких промежуточных платежей с обеих сторон получает в другую более позднюю дату (дату исполнения) согласованную по контракту сумму. Обе эти суммы однозначно связаны между собой через третью величину, ставку доходности (и, конечно, срок действия контракта). В современном мире существует большое разнообразие финансовых контрактов (активов), из которых мы рассмотрим только некоторые, имеющие прямое отношение к проблеме построения и исследования основных математических моделей рисков, встречающихся на финансовых рынках.

Пожалуй, наиболее простым активом является депозитный счет в банке, по которому выплачиваются проценты. Стоимость банковского счета на дату t, на который в дату s была положена сумма $V(s)$ вычисляется по формуле

$$V(t) = V(s)\exp\{r(t-s)\},$$

где r является согласованной процентной ставкой накопления денег.

Если процентная ставка является плавающей, зависимой от каких либо изменяющихся со временем финансовых показателей, то эта формула преобразуется к виду

$$V(t) = V(s)\exp\left\{\int_s^t r(\tau)d\tau\right\}.$$

ОБЛИГАЦИИ

Другими широко известными активами являются *облигации* (*bond*) и близкие к ним по смыслу ценные бумаги: *расписки* (*note*), *векселя* (*bill*) и др. Облигации выпускаются государством или могущественными корпорациями для займа денег на крупные проекты и являются ценными бумагами, по которым выпускающее их учреждение обязуется выплачивать определенные платежи владельцу облигации в течение определенного срока. Существует большое количество видов облигаций, из которых мы упомянем только два. Владельцам *купонных облигаций* (*coupon bond*) выплачиваются так называемые купонные платежи в течение всего срока действия облигации до *даты погашения* (*maturity*), затем в дату погашения возмещается *номинальная стоимость* (*face value*). *Бескупонные облигации* (*zero coupon bond*) не обеспечивают купонных платежей, но продаются по дисконтированной стоимости и предусматривают выплату номинальной стоимости в дату погашения. Цена P_C купонной облигации с номинальной стоимостью V, сроком действия T лет и купонными выплатами C через каждые полгода рассчитывается по формуле

$$P_C(T) = V\exp\{-rT\} + C\sum_{t=1}^{2T}\exp\{-rt/2\},$$

где r является годовой эффективной процентной ставкой. Для того чтобы получить формулу для определения цены бескупонной облигации, в этой формуле следует только подставить ноль вместо C. Из формулы для $P_C(T)$ видно, что купонную облигацию можно рассматривать как портфель из $2T+1$ бескупонных облигаций, $2T$ из которых имеют номинальную стоимость C и разные сроки погашения (от полугода до T лет), а одна имеет номинальную стоимость V и срок погашения T лет. Поэтому при анализе задач, связанных с облигациями, обычно рассматривают бескупонные (дисконтированные) облигации, имея в виду, что комбинация решений таких задач составит решение необходимой задачи для купонной облигации.

АКЦИИ

Класс широко распространенных активов составляют *акции* (*stock*, *share*). Акции выпускаются корпорациями, которые передают определенные права владельцам акций, основным из которых является право претендовать на доходы, получаемые корпорацией. Имеются два основных типа акций: *привилегированные* (*preferred stock*)и *обыкновенные* (*common stock*). Привилегированные акции предусматривают установленный доход, который начисляется на акцию в первую очередь в виде твердого, заранее определенного процента. Большинство привилегированных акций являются *накопительными*. Это означает, что если выдача дивидендов задерживается, они накапливаются и должны быть выплачены до того, как свои дивиденды получат обыкновенные акционеры. Некоторые привилегированные акции являются *конвертируемыми*, т. е., они могут быть преобразованы в обыкновенные акции. Привилегированные акции обычно можно выкупить по фиксированной цене по желанию компании. Эта особенность отзыва важна для компании, поскольку она дает ей право возвращать акционерный капитал, когда обстановка на рынке капитала благоприятна. С точки зрения инвестора привилегированные акции по безопасности ниже рангом, чем облигации, и ниже обыкновенных акций в возможностях для роста и увеличения доли прибыли успешно действующей корпорации.

Рисковый капитал, который позволяет новым фирмам начинать свою деятельность, а существующим расширяться, обычно получается путем продажи обыкновенных акций. Владельцы этих акций принимают риски собственности и, когда случаются неудачи, могут потерять весь свой инвестированный капитал или его часть. С другой стороны, их возможные доходы ничем не ограничиваются. Если их компания успешно ведет дело, они могут получать как увеличивающиеся *дивиденды*, так и увеличивающуюся рыночную цену за свои акции. Дивиденды на обыкновенные акции зависят, в первую очередь, от того, сколько заработала корпорация в текущем году и какой является плановая прибыль на реинвестированные заработки. Доходы по акциям, как правило, выплачиваются один раз в год.

Привилегированные акции подобны бессрочным купонным облигациям, поскольку как те, так и другие являются типами ценных бумаг с фиксированным доходом без дат погашения. Поэтому цена привилегированной акции может быть вычислена по формуле для цены купонной облигации при $T \to \infty$. Поскольку дивиденды D обычно выплачиваются один раз в год, то при годовой эффективной процентной ставке r цена привилегированной акции может быть вычислена по формуле

$$P_{\text{ПА}} = D\sum_{t=1}^{\infty}\exp\{-rt\} = \frac{D}{e^r - 1}.$$

ФИНАНСОВЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Мы рассмотрели основные типы ценных бумаг, они могут служить основными активами, на базе которых образуются другие многочисленные финансовые инструменты. *Производной ценной бумагой* (*финансовой производной*, *derivative security*, *contingent claim*) называется ценная бумага, стоимость которой зависит от стоимости других, лежащих в основе активов. В последние годы производные ценные бумаги приобретают все большую важность в финансовой области.

Для того чтобы проиллюстрировать постоянно растущую активность на финансовом рынке, приведем несколько цифр. Крупнейшей биржей, торгующей финансовыми инструментами, является биржа Чикагского управления торговли (CBOT, США). На этой бирже в 1976 г. было заключено около 129 тысяч финансовых контрактов и около 19 миллионов контрактов на сельскохозяйственную и металлургическую продукцию. Через 14 лет, в 1990 г., эти цифры изменились следующим образом: свыше 114 миллионов финансовых контрактов и около 40 миллионов контрактов на сельскохозяйственную и металлургическую продукцию. Так что число финансовых контрактов увеличилось почти в 1000 раз, а число контрактов на товарную продукцию только в два раза. Что касается финансовых производных, то рост контрактов в этой сфере еще значительнее. История широкого распространения финансовых производных началась с составления в одном из чикагских отелей схемы переводного векселя, который решительно изменил международные финансовые рынки. Переводной вексель был первым в мире *фьючерсным контрактом* (*фьючерсом*, *futures*), который начал продаваться на CBOT в октябре 1975 г. Менее чем через два года после этого в августе 1977 г. был запущен фьючерсный контракт на облигации казначейства США и до конца года было продано свыше 22 тысяч этих фьючерсов. В 1990 г. было уже заключено 76 миллионов таких контрактов. За один только день, 9 июня 1989 г., было заключено 704 400 контрактов на общую номинальную стоимость 70 440 миллионов долларов. Все эти цифры являются показателями активности только на одной бирже CBOT. В апреле 1983 г. CBOT создал Чикагскую биржу торговли опционами (CBOE) с единственной целью торговать опционами на ограниченное число акций Нью-Йоркской фондовой биржи. В 1990 г. на этой бирже было продано уже более 28 миллионов таких контрактов, что составило около 25 % общего объема продаж CBOT. Эти цифры говорят о том, что созданные финансовые инструменты являются привлекательными для широкого круга участников финансовых рынков, число которых резко увеличилось. Рассмотрим более детально структуру основных финансовых производных.

ФОРВАРДНЫЕ КОНТРАКТЫ

Форвардный контракт (*forward contract*) – наиболее простая финансовая производная. Он является соглашением купить или продать актив по определенной цене в определенное будущее время. Контракт заключается обычно между двумя финансовыми учреждениями или между финансовым учреждением и одним из его корпоративных клиентов. На бирже ими обычно не торгуют. Одна из сторон форвардного контракта занимает *длинную позицию* (*long position*) и соглашается купить лежащий в основе актив по определенной фиксированной цене в определенный фиксированный день в будущем. Другая сторона занимает *короткую позицию* (*short position*) и согласна продать актив в тот же день по той же цене. Фиксированная цена в форвардном контракте называется *ценой доставки* (*delivery price*)**.** Во время оформления контракта цена доставки выбирается так, чтобы стоимость форвардного контракта для обеих сторон равнялась нулю. Это означает, что занять или длинную, или короткую позицию ничего не стоит. Форвардный контракт оплачивается при погашении. Держатель короткой позиции доставляет актив держателю длинной позиции за наличную сумму, равную цене доставки. Ключевой величиной, определяющей стоимость форвардного контракта, является рыночная цена актива. *Форвардная цена* (*forward price*) такого контракта определяется как цена доставки, которая обеспечивала бы нулевую стоимость контракту. Форвардная цена и цена доставки, следовательно, одинаковы в момент оформления контракта. С течением времени форвардная цена подвержена изменению, в то время как цена доставки, конечно, остается неизменной.

ФЬЮЧЕРСНЫЕ КОНТРАКТЫ

Фьючерсный контракт (*futures contract*), подобно форвардному контракту, является соглашением между двумя сторонами купить или продать актив в определенное время в будущем по определенной цене. В отличие от форвардных контрактов фьючерсными контрактами обычно торгуют на биржах. Чтобы сделать торговлю возможной, биржи устанавливают определенные стандартизированные характеристики контрактов, так что двум сторонам контракта нет необходимости знать один другого. Биржа также обеспечивает механизм торговли, который дает обеим сторонам гарантию того, что контракт будет оплачен. Особенностью, которой фьючерсный контракт отличается от форвардного контракта, является то, что точная дата доставки обычно не фиксируется. Контракт фиксирует месяц доставки, а биржа конкретизирует период в течение месяца, когда доставка может быть осуществлена. Для товаров периодом доставки чаще всего является весь месяц. Держатель короткой позиции имеет право выбрать время в течение периода доставки, когда он осуществит доставку. Биржа определяет сумму актива, который должен быть доставлен по одному контракту;

способ объявления фьючерсной цены, и, возможно, ограничения на сумму, на которую может изменяться фьючерсная цена в течение одного дня. Цены фьючерсов регулярно сообщаются в финансовой прессе. Они определяются на бирже тем же путем, что и другие цены (т. е. путем спроса и предложения). Если больше инвесторов хотят пойти дальше, цена поднимается вверх; если верно обратное, цены падают.

ОПЦИОНЫ

Торговля *опционами* (*option*) на акции, как сказано выше, была впервые организована на бирже в 1973 г. Лежащими в основе этих финансовых производных активами являются акции, индексы акций, иностранная валюта , долговые инструменты, товары и фьючерсные контракты. Имеется два основных типа опционов. *Колл опционы* (*call option*) дают право владельцу купить лежащий в основе актив в определенную дату по определенной цене. *Пут опционы* (*put option*) дают право владельцу продать лежащий в основе актив в определенную дату по определенной цене. Контрактная цена называется *ценой исполнения* (*exercise price*, *strike price*); контрактная дата называется *датой истечения* (*expiration date*), *датой исполнения* (*exercise date*) или *погашения* (*maturity*). *Американские опционы* (*American option*) могут быть исполнены в любое время до даты истечения. *Европейские опционы* (*European option*) могут быть исполнены только в дату истечения. (Заметим, что термины *американские* и *европейские* относятся не к месту заключения контракта или расположению биржи, а определяют тип опциона.) Большинство опционов, которыми торгуют на биржах, являются американскими. Однако европейские опционы обычно легче анализировать, чем американские, и некоторые свойства американского опциона часто выводятся из свойств его европейского аналога.

Следует подчеркнуть, что опцион дает право владельцу сделать что-то. Владелец не обязан использовать это право. Этот факт отличает опционы от форвардов и фьючерсов, когда владелец обязывается купить или продать лежащий в основе актив. Заметим также, что при оформлении форвардного или фьючерсного контракта не требуется никаких расходов, а чтобы приобрести опционный контракт, инвестор должен заплатить. В каждом опционном контракте имеется две стороны. Первая – инвестор, который занял длинную позицию (т. е. купил опцион). Вторая – инвестор, который занял короткую позицию (т. е. продал или *написал* (*has written*) опцион). Продавец опциона получает деньги сразу, но имеет потенциальные обязательства позже. Его прибыль или потери являются обратными по отношению к тем, которые имеет покупатель опциона.

Часто полезно характеризовать позиции европейского опциона через выплаты инвестору при погашении. Начальная стоимость опциона при этом не учитывается при расчетах. Если K является ценой исполнения, а S_T – окончательная цена лежащего в основе актива, в европейском колл опционе инвестор, занявший длинную позицию, выплачивает сумму $\max(S_T - K, 0)$. Это отражает тот факт, что опцион будет исполнен, если $S_T > K$, и не будет исполняться, если $S_T \le K$. Выплата держателю короткой позиции в европейском колл опционе равна $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$. Выплата держателю длинной позиции в европейском пут опционе равна $\max(K - S_T, 0)$. Это означает, что партнер, занявший короткую позицию в европейском пут опционе, выплачивает сумму $-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$.

ДРУГИЕ ФИНАНСОВЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

В последние годы банки и другие финансовые учреждения были очень изобретательными в создании нестандартных финансовых производных для удовлетворения нужд клиентов. Иногда финансовые учреждения продают их непосредственно своим клиентам. В других случаях они добавляются к выпускам облигаций или акций, чтобы сделать эти выпуски более привлекательными для инвесторов. Некоторые из ценных бумаг являются просто комбинациями более простых контрактов, таких как форварды или опционы. Другие являются значительно более сложными. Возможности для конструирования новых интересных финансовых производных представляются неограниченными. Этими проблемами занимается специальный раздел финансового анализа – финансовая инженерия. Рекомбинируя существующие рисковые финансовые инструменты, финансовый инженер улучшает конкурентную способность контрактов и приспосабливает их к нуждам конкретных инвесторов.

ФОРВАРДНЫЕ И ФЬЮЧЕРСНЫЕ ЦЕНЫ

Теперь мы рассмотрим, как форвардные и фьючерсные цены относятся к цене лежащего в основе актива. Форвардные контракты анализировать обычно легче, чем фьючерсные. Поэтому большая часть анализа посвящается форвардным, а не фьючерсным ценам. К счастью, можно показать, что форвардные и фьючерсные цены актива обычно очень близки одна к другой, когда погашение двух этих контрактов происходит в одну дату. Это означает, что результаты, полученные для форвардных цен, можно предполагать верными и для фьючерсных цен. Мы будем предполагать, что для некоторых участников рынка справедливы следующие утверждения:

1. Нет никаких расходов на сделку.
2. Вся торговая прибыль (за вычетом торговых потерь) облагается одинаковыми налогами.
3. Участники рынка могут занимать деньги по той же свободной от риска процентной ставке, по какой они могут ссужать деньги.
4. Участники рынка при появлении арбитражных возможностей используют их преимущества.

Подчеркнем, что обычно не требуется, чтобы эти предположения были верными для всех участников рынка. Необходимо только, чтобы они были верны для части участников рынка, например больших инвестиционных фирм. Это разумно, поскольку участники рынка при появлении арбитражных возможностей готовы использовать их преимущества. Поэтому арбитражные возможности исчезают практически почти так же быстро, как и появляются. Таким образом, это фактически эквивалентно предположению, что не имеется никаких арбитражных возможностей.

Для получения формальных соотношений, касающихся стоимости финансового контракта, будем пользоваться следующими обозначениями:

T – время, когда форвардный контракт погашается (в годах);

t – текущее время (в годах);

S – цена актива, лежащего в основе форвардного контракта в момент t;

S_T – цена актива, лежащего в основе форвардного контракта в момент T (неизвестная в текущее время t);

K – цена доставки в форвардном контракте;

f – стоимость продолжительного форвардного контракта в момент t;

F – форвардная цена в момент t;

r – безрисковая годовая процентная ставка в момент t, непрерывно конвертируемая, для инвестиции, погашаемой в момент T.

Переменные T и t измеряются в годах, начиная от некоторой даты (она не является важной) до начала контракта. Величиной, необходимой для анализа стоимости контракта относительно текущего момента времени t, является время $T - t$, остающееся до погашения форвардного контракта, измеренное в годах.

Важно понимать, что форвардная цена F по смыслу отличается от стоимости форвардного контракта f. Форвардная цена в любое данное время является ценой доставки, которая бы обращала в нуль стоимость контракта в момент его заключения. Если контракт заключается в момент t, то цена доставки устанавливается равной форвардной цене, так что $F = K$ и $f = 0$. С течением времени как f, так и F изменяются.

Проанализируем несколько различных форвардных контрактов при отсутствии арбитражных возможностей. Простейшим для расчета форвардным контрактом является контракт, оформленный на актив, который не предусматривает какого-либо промежуточного дохода для его владельца. Тогда стоимости форвардного контракта f и его форвардная цена F определяются соотношениями

$$f = S - K \exp\{-r(T-t)\}, \quad F = S \exp\{r(T-t)\}.$$

Рассмотрим теперь форвардный контракт на актив, который предусматривает полностью предсказуемый денежный доход для владельца. Примерами являются акции, по которым выплачиваются известные дивиденды, и купонные облигации. Определим I как настоящую стоимость дохода, получаемого в течение срока действия контракта, при вычислении которой используется ставка дисконта, равная безрисковой ставке r. В этом случае стоимости форвардного контракта f и его форвардная цена F определяются равенствами

$$f = S - I - K \exp\{-r(T-t)\}, \quad F = (S - I) \exp\{r(T-t)\}.$$

Если дивидендный доход выплачивается непрерывно с годовой нормой q, то получаем другие формулы для вычисления f и F:

$$f = S\exp\{-q\,(T-t)\} - K\exp\{-r\,(T-t)\},\quad F = S\exp\{(r-q)(T-t)\}.$$

Для определения стоимости форвардного контракта можно выписать формулу, которая является справедливой для всех активов (как для инвестиционных целей, так и для целей потребления) и имеет вид

$$f = (F-K)\exp\{-r\,(T-t)\}.$$

Это справедливо, так как в противном случае будут возникать арбитражные возможности, если

$$f > (F-K)\exp\{-r\,(T-t)\} \quad \text{или} \quad f < (F-K)\exp\{-r\,(T-t)\}.$$

Рассмотрим сначала ситуацию $f > (F-K)\exp\{-r\,(T-t)\}$. Мы занимаем длинную позицию в форвардном контракте с ценой доставки F и датой погашения T и короткую позицию в форвардном контракте с ценой доставки K и датой погашения T. Так как первый контракт имеет нулевую стоимость, эта стратегия порождает начальный поток платежей, равный f. Финальный поток платежей равен

$$(S_T - F) + (K - S_T) = -(F-K),$$

поэтому инвестиция завершается потоком платежей с положительной настоящей стоимостью

$$f - (F-K)\exp\{-r(T-t)\}.$$

Аналогично, если $f < (F-K)\exp\{-r(T-t)\}$, мы занимаем короткую позицию в форвардном контракте с ценой доставки F и датой погашения T и длинную позицию в форвардном контракте с ценой доставки K и датой погашения T. Это завершается потоком платежей с положительной настоящей стоимостью:

$$(F-K)\exp\{-r(T-t)\} - f.$$

Можно показать, что когда безрисковая процентная ставка является постоянной и одинаковой для всех дат погашения, форвардная цена для контракта с определенной датой доставки является точно такой же, как и фьючерсная цена для контракта с той же датой доставки. Когда процентные ставки изменяются непредсказуемо (как это происходит в реальном мире), форвардные и фьючерсные цены теоретически уже не являются одинаковыми. Доказательство взаимоотношения между ними выходит за рамки этой книги. Отметим только, что когда S является строго положительно коррелированной с процентными ставками, фьючерсные цены будут стремиться принимать более высокие значения, чем форвардные цены. Когда S является строго отрицательно коррелированной с процентными ставками, форвардные цены стремятся быть выше, чем фьючерсные цены. Теоретические различия между форвардными и фьючерсными ценами для контрактов, которые продолжаются только несколько месяцев, являются чаще всего достаточно малыми и могут игнорироваться. Когда продолжительность контрактов увеличивается, эти различия становятся больше. На практике имеется ряд факторов, не отраженных в теоретических моделях, которые могут вызывать различия между форвардными и фьючерсными ценами. Эти факторы включают налоги, стоимости сделок и т. д. В некоторых случаях фьючерсные контракты являются более ликвидными и простыми для торговли, чем форвардные. Несмотря на все эти соображения, чаще всего разумно предположить, что форвардные и фьючерсные цены одинаковы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ. МОДЕЛЬ БЛЭКА – ШОУЛСА

В своей знаменитой работе об определении цен опционов (см. Black & Scholes, 1973), отмеченной Нобелевской премией в 1997 г., Блэк и Шоулс получили дифференциальное уравнение для цен финансовых производных, зависящих от цены акции, по которой не выплачиваются дивиденды. Основной смысл рассуждений, которые использовали авторы, состоял в том, что составляется безрисковый портфель из двух финансовых контрактов: финансовой производной и акции. Затем доход такого портфеля приравнивается к доходу, получаемому от такой же по величине инвестиции при безрисковой ставке. В модели Блэка – Шоулса портфель остается безрисковым только в течение короткого периода времени. Тем не менее можно доказать, что доход в течение этого короткого временного периода должен быть безрисковой процентной ставкой, если арбитражные возможности отсутствуют. Такой безрисковый портфель можно создать, если и цена акции, и цена финансовой производной подвергаются единственному источнику неопределенности. Это означает, что в течение любого короткого периода времени неопределенности как в цене акции, так и в цене финансовой производной полностью коррелированы. Когда такой портфель из финансовой производной и акции составлен, прибыль (или потери) акции компенсируется потерями (или прибылью) финансовой производной, поэтому полная стоимость портфеля в конце короткого периода времени достоверно известна.

Перечислим предположения, которые лежат в основе анализа:

1. Цена актива S изменяется во времени случайным образом, следуя случайному процессу, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (см. математическое дополнение):

$$dS = \mu\, dt + \sigma S\, dW(t)\,,$$

где μ и σ являются постоянными.

2. Разрешается короткая продажа активов с использованием выручки в полном объеме, то есть активы и их финансовые производные свободно продаются и покупаются без ограничений.

3. Не имеется каких-либо расходов на совершение сделок и налоги. Могут продаваться (покупаться) какие угодно доли всех активов.

4. В течение срока действия финансовых производных никакие дивиденды не выплачиваются.

5. Не имеется никаких безрисковых арбитражных возможностей.

6. Торговля активами производится в непрерывном времени.

7. Безрисковая процентная ставка r является постоянной и одинаковой для всех сроков погашения.

При этих предположениях стоимость финансовой производной будет зависеть только от цены актива S, времени t и от параметров, которые считаются известными константами. Тогда, поскольку изменение цены актива S представляет собой случайный процесс, цена финансовой производной $f(S,t)$ сама является случайным процессом, который удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению, определяемому по формуле Ито (см. математическое дополнение), в виде

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma\ S dW(t).$$

Разностная версия стохастических уравнений для цен S и f имеет вид

$$\Delta S = \mu\, \Delta t + \sigma S\, \Delta W(t),$$
$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma\ S \Delta W(t),$$

где ΔS и Δf являются изменениями цен S и f через короткий временной интервал Δt. Напомним, что, по предположению, неопределенности в ценах акции и финансовой производной порождаются одним и тем же источником случайных возмущений. Формально это означает, что стандартный винеровский процесс $W(t)$ в уравнениях для цен S и f является одним и тем же и $(\Delta W(t))^2 = \Delta t$. Из этого следует, что, составляя портфель из акции и финансовой производной, можно исключить из его стоимости источник неопределенности в виде приращений винеровского процесса. Таким портфелем является:

одна короткая позиция в контракте финансовой производной и

$\dfrac{\partial f}{\partial S}$ длинных позиций в контракте акции.

По определению, стоимость V такого портфеля

$$V = (-1)f + \frac{\partial f}{\partial S} S,$$

поэтому изменение этой цены через интервал времени Δt окажется равным

$$\Delta V = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S .$$

Подставив сюда приращения Δf и ΔS из уравнений, получим следующее выражение для изменения стоимости портфеля:

$$\Delta V = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t .$$

Поскольку это выражение не включает случайных приращений, то в течение времени Δt такой портфель должен быть эквивалентен некоторому безрисковому портфелю. Согласно принятым предположениям, такой портфель должен в течение времени Δt приносить такой же доход, как и краткосрочный актив такой же стоимости с безрисковой процентной ставкой. В противном случае был бы возможен арбитраж, т. е. безрисковое получение прибыли. Действительно, пусть доход портфеля больше дохода, приносимого краткосрочным безрисковым активом. Тогда владелец безрискового актива мог бы продать свой актив на короткое время Δt, купить на эти деньги портфель, заработать излишек и снова, продав портфель, вернуть свой актив, получив прибыль. Если, наоборот, доход портфеля меньше дохода, приносимого краткосрочным безрисковым активом, то владелец портфеля мог бы продать свой портфель на короткое время Δt, купить на эти деньги безрисковый актив, заработать излишек и снова, продав безрисковый актив, вернуть свой портфель, получив прибыль. Из этого следует, что для того, чтобы таких возможностей получения безрисковой прибыли не было, изменение стоимости портфеля за корокий промежуток времени Δt должно быть равно процентам краткосрочного безрискового актива такой же стоимости, т. е. $\Delta V = rV\Delta t$, где r является безрисковой процентной ставкой. Подставляя сюда явные выражения для ΔV и V и сокращая обе части равенства на Δt , получаем знаменитое дифференциальное уравнение Блэка – Шоулса для цены финансовой производной:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf .$$

Рассмотрим колл опцион европейского типа с ценой исполнения K и датой исполнения T на лежащий в основе актив стоимостью S. Как было выше определено, владелец этого опциона в дату T *имеет право* купить одну лежащую в основе контракта акцию по цене K у продавца опциона. Владелец опциона никоим образом *не обязан* покупать эту акцию. Право купить одну лежащую в основе контракта акцию по цене K распространяется только на дату T. Отсюда следует, что опцион имеет смысл исполнять только тогда, когда его стоимость будет неотрицательной, т. е. в дату T стоимость опциона будет равна $f(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Это равенство следует рассматривать как граничное условие при решении уравнения Блэка – Шоулса в случае европейского колл опциона. Таким образом, разнообразие финансовых производных задает разнообразие граничных условий и, следовательно, формул для определения цен этих финансовых производных. Заметим также, что уравнение Блэка – Шоулса определяет безрисковый портфель только локально, т. е. на очень короткий интервал времени $(t, t + dt)$. Поэтому для того чтобы портфель был безрисковым в течение интервала времени (t, T), необходимо в каждый момент этого интервала модифицировать портфель так, чтобы он содержал $\partial f / \partial S$ длинных позиций на лежащий в основе актив, другими словами, число этих позиций должно постоянно модифицироваться, т. е. зависеть от времени.

Пример 1. Форвардный контракт на акцию, по которой не выплачиваются дивиденды, является финансовой производной, зависимой от цены акции. Если это так, его стоимость должна удовлетворять уравнению Блэка – Шоулса. Как было сказано выше, стоимость такого контракта равна

$$f = S - K \exp\{-r(T-t)\},$$

где K – цена доставки. Это значит, что

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0.$$

При подстановке этих величин в уравнение Блэка – Шоулса оно удовлетворяется.

Пример 2. Найдем стоимость европейского колл опциона. Для этого нам нужно решить уравнение Блэка – Шоулса при граничном условии $f(T) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Используя методы решения уравнений в частных производных, описанные в математическом дополнении, мы получаем

$$f(t) = S(t)\, \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

где $\Phi(d)$ – функция стандартного нормального распределения, а d_1 и d_2 определяются по следующим формулам:

$$d_1 = \frac{\ln\bigl(S(t)/K\bigr) + \bigl(r + \sigma^2/2\bigr)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + \left(r - \sigma^2/2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\ .$$

Пример 3. Найдем стоимость европейского пут опциона. В этом случае нам нужно решить уравнение Блэка – Шоулса при несколько другом граничном условии $f(T) = \max\{K - S(T), 0\}$. Снова обращаясь к математическому дополнению, получаем

$$f(t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\,\Phi(-d_1),$$

где используемые в этой формуле обозначения имеют тот же смысл, что и в предыдущем примере.

1.2 ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Чтобы лучше понять, как разрабатывается модель временной структуры (*term structure*) процентных ставок (*interest rates*) в условиях неопределенности, полезно рассмотреть модель временной структуры в детерминированном случае. В детерминированной среде легче объяснить (и понять) различные тенденции, формирующие временную структуру, и, в частности, вышеупомянутое предположение относительно будущих процентных ставок, называемое «гипотезой ожидания». Таким образом, этот раздел служит своего рода путеводителем для более трудного материала при изучении временной структуры процентных ставок в условиях неопределенности в стохастическом случае.

Дисконтируемая облигация (*discount bond*) с датой погашения T, является ценной бумагой, по которой выплачивается 1 денежная единица в дату T и ничего в любое другое время. Обозначим цену этой облигации в момент $t \le T$ через $P(t,T)$. Тогда условие погашения получаем в виде

$$P(T,T) = 1.$$

Доходностью до погашения (*yield to maturity*) $y(t,T)$ называется непрерывно конвертируемая доходность (*rate of return*), вызывающая повышение цены облигации до единицы в дату T:

$$P(t, T)\exp\{(T-t)\,y(t, T)\} \equiv 1;$$

разрешая это тождество относительно доходности, находим, что

$$y(t,\,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{1.1}$$

Для фиксированного t вид $y(t,T)$ при увеличении T определяет временную структуру процентной ставки или, что то же самое, *кривую доходности* (*yield curve*). Из формулы (1.1) ясно, что временная структура может быть увеличивающейся или уменьшающейся функцией T в зависимости от структуры равновесных цен облигаций, т. е. цен на рынке, который находится в состоянии равновесия. В общем случае для любых заданных дат погашения T доходность является положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли $P(t,\,T)$ соответственно меньше чем 1 или больше чем 1.

Понятием, имеющим большую важность, является краткосрочная или спот (*short*, *spot*) процентная ставка. Краткосрочная процентная ставка – это доходность облигации, погашаемой через очень короткий срок после текущего момента времени. Отсюда, обозначая спот ставку в момент t через $r(t)$, получаем

$$r(t) \equiv y(t,\,t).$$

Спот ставка равна скорости, с которой цена облигации, погашаемой в момент времени t, достигает единицы, как можно увидеть, переходя в формуле (1.1) к пределу при $t \to T$ и применяя правило Лопиталя:

$$r(T) = \left.\frac{\partial\, P(t,T)}{\partial\, t}\right|_{t=T} \quad \text{для всех } T. \tag{1.2}$$

Краткосрочная процентная ставка $r(t)$ является нормой прибыли (доходностью), с которой инвесторы могут зарабатывать в течение очень короткого интервала времени, следующего за моментом t. Поэтому она иногда называется мгновенной.

Пусть инвестор в настоящий момент времени владеет облигацией, погашаемой во время T_1. С какой доходностью он зарабатывал бы выручку от этой облигации между датами T_1 и $T_2 > T_1$, если он обладает сведениями о доходностях сейчас, во время t? Ответом является форвардная процентная ставка (*forward interest rate*). Форвардная процентная ставка $f(t,\,T_1,\,T_2)$ – это процентная ставка для будущего периода $(T_1,\,T_2)$ относительно $t < T_1$, которая приравнивает полный доход долгосрочной облигации к доходу стратегии прокручивания краткосрочных облигаций. Форвардная ставка выводится из временной структуры (кривой доходности), имеющейся в настоящее время t. В нашем случае $f\,(t,\,T_1,\,T_2)$ определяется тождеством

$$P(t,\,T_1) \equiv P(t,\,T_2)\exp\{(T_2 - T_1)\,f\,(t,\,T_1,\,T_2)\},$$

разрешив которое относительно $f(t, T_1, T_2)$, получим

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln\left[\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}\right]. \tag{1.3}$$

То, что форвардная ставка представляет в текущий момент времени t доходность на безрисковую дисконтируемую облигацию в течение времени от T_1 до T_2, можно видеть, рассматривая следующие возможные сделки в момент t. Купим N облигаций, погашаемых во время T_2, отдав за них $NP(t, T_2)$ долларов. Эти облигации принесут нам N долларов в момент T_2. Сколько стоили бы с учетом ситуации, сложившейся на рынке в настоящее время t, облигации, которые нам нужно будет купить в момент времени T_1 для получения в момент T_2 этой же суммы? Они будут стоить некоторую сумму $NP(T_1, T_2|t)$. Отсюда следует, что для получения этой суммы в момент T_1 нам следует купить в текущий момент времени t $NP(T_1, T_2|t)$ облигаций по цене $P(t, T_1)$. Таким образом, для получения N долларов в момент времени T_2 мы можем использовать два способа: купить N облигаций по цене $P(t, T_2)$ или же купить $NP(T_1, T_2|t)$ облигаций по цене $P(t, T_1)$. Так как эти два способа дают один и тот же результат, на равновесном рынке обе инвестиции в момент времени t должны быть одинаковой величины, что приводит к равенствам $NP(t, T_2) = NP(T_1, T_2|t)P(t, T_1)$, или $P(T_1, T_2|t) = P(t, T_2)/P(t, T_1)$. Но левая часть последнего равенства имеет смысл цены облигации, покупаемой в момент T_1 с датой погашения T_2. Поэтому, обозначая через $f(t, T_1, T_2)$ доходность до погашения этой облигации, когда она рассчитывается с учетом ситуации, сложившейся на рынке в настоящее время t, т. е. форвардную ставку, и используя формулу (1.1) для подсчета этой доходности, получим формулу (1.3) в следующем виде:

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln P(T_1, T_2|t)}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln\left[\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)}\right].$$

Форвардная ставка $f(t, T_1, T_2)$ является просто ставкой процентов, заработанных на инвестицию $P(T_1, T_2|t)$. Следует подчеркнуть еще раз, что для всяких T_1 и T_2 форвардные ставки вычисляются только через рыночные цены, имеющиеся в наличии в момент t.

Частным случаем является мгновенная форвардная ставка

$$f(t, T) = f(t, T, T),$$

которая представляет собой мгновенную доходность, с которой владелец контракта может зарабатывать, распространяя действие своей инвестиции на очень короткий временной интервал (мгновение) после T. Поэтому переходя к пределу $T_1 \to T_2 = T$ в формуле (1.3) и используя правило Лопиталя, находим

$$f(t,T) = -\frac{1}{P(t,T)} \frac{\partial\, P(t,T)}{\partial\, T}. \tag{1.4}$$

Таким образом, функция текущей цены облигации полностью определяет все мгновенные форвардные ставки.

Обычно принимается, что в детерминированном случае при равновесии на рынке все ценные бумаги должны иметь одинаковые мгновенные доходности, чтобы исключить арбитражные возможности. (Более подходящим было бы назвать это принципом равных доходностей.) Применение этого условия равновесия к дисконтируемым облигациям требует, чтобы удовлетворялось равенство

$$\frac{\partial\, P(t,T)}{\partial\, t} - r(t)P(t,T) = 0 \tag{1.5}$$

в любой момент времени t и для всех $T > t$. Единственным решением уравнения (1.5), удовлетворяющим граничным условиям $P(T, T) = 1$ и $P(t, T) \geq 0$, является

$$P(t,T) = \exp\left\{ -\int_t^T r(s)ds \right\}. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) для цен облигаций говорит о том, что изменения спот ставки полностью определяют все цены облигаций в течение всего времени. Эта формула определения цены является относительной, так как она предполагает, что процесс для $r(s)$ задан, и определяет цены облигаций по отношению к этому процессу. Действительно, чтобы определить $P(t, T)$, нам нужно знать только изменение $r(s)$ на интервале времени $[t, T]$. *Доходность до погашения* (*yield to maturity*) на облигацию, погашаемую в дату T, является средним значением спот ставок на интервале времени от t до T, как это можно видеть, подставляя (1.6) в формулу (1.1):

$$y(t,T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s)ds. \tag{1.7}$$

Поэтому временная структура процентных ставок между датами t и T зависит только от изменения спот ставки в течение этого интервала.

Каково соотношение между мгновенными спот ставками и мгновенными форвардными ставками? Они, конечно, равны, как можно заметить, подставляя (1.6) в формулу (1.4) и получая

$$f(t, T) = r(T) \quad \text{и} \quad f(t, T) = f(0, T) \qquad \text{для всех} \quad T \geq t \geq 0. \tag{1.8}$$

Равенство (1.8) является детерминированной формой одноперидной (в нашем случае мгновенной) «гипотезы ожидания». Эта гипотеза состоит в том, что ожидаемые будущие мгновенные спот ставки в момент T равны непрерывно вычисляемым мгновенным форвардным ставкам в момент T. Эта формулировка является вырожденной формой гипотезы ожиданий, так как в детерминированном случае ожидаемая спот ставка совпадает с фактической спот ставкой.

Аналогично для любого t форвардная ставка между T_1 и T_2 всегда равна доходности, которая будет иметься в момент T_1 на облигацию, погашаемую в момент T_2. Это можно увидеть, подставив цену облигации, определяемую формулой (1.6), в равенство (1.3) и сравнивая полученное выражение с (1.7), то есть

$$f(t, T_1, T_2) = y(T_1, T_2)\,. \tag{1.9}$$

Как и в случае мгновенных ставок, уравнение (1.9) является вырожденной формой многопериодной гипотезы ожиданий, которая требует, чтобы ожидаемые будущие доходности равнялись непрерывно вычисляемым форвардным ставкам в течение такого же по длительности, но произвольного интервала времени.

В детерминированном случае стратегия прокрутки краткосрочных позиций эквивалентна покупке и владению долгосрочной позиции. С одной стороны, если $P(t, T)$ долларов инвестируются в момент t в облигацию с датой погашения T, то инвестор получит 1 доллар в момент T. С другой стороны, если инвестор вложит ту же сумму в мгновенно погашаемые (т. е. с очень коротким сроком погашения) безрисковые облигации и будет непрерывно реинвестировать выручку в мгновенно погашаемые безрисковые облигации (это называется *прокруткой краткосрочной позиции*, *rolling over short-term position*), то к моменту T он накопит

$$P(t,T)\exp\left\{\int_t^T r(s)ds\right\} = \$1.$$

Итак, структура с текущим сроком полностью определяет все структуры с будущими сроками. Это происходит потому, что структура с текущим сроком дает все будущие мгновенные спот процентные ставки (по формуле (1.2)), а все структуры с будущими сроками определяются будущими мгновенными спот процентными ставками (как видно из (1.7)).

Подведем итог полученным результатам:

- временная структура в детерминированном случае дается функциональным отображением (1.7) функции мгновенной спот ставки в долгосрочную доходность;

- ставки доходности для интервала любой продолжительности для всех имеющихся у инвестора облигаций одинаковы и, в частности, равны мгновенной (т. е. для очень короткого интервала) ставке доходности;
- все формы гипотезы ожидания справедливы;
- стратегия прокрутки краткосрочной позиции эквивалентна покупке и владению долгосрочной позицией;
- текущая временная структура полностью определяет все будущие временные структуры.

Таким образом, знание будущих мгновенных процентных ставок является достаточным, чтобы определять всю временную структуру процентных ставок для всех сроков. В свою очередь, естественно спросить: «Что нужно знать, чтобы определить будущие мгновенные процентные ставки?».

Чтобы ответить на этот вопрос, приходится усложнять модель, увеличивая ее размерность, вводя другие основные переменные состояния, которые определяли бы значения краткосрочной процентной ставки $r(t)$. Покажем это на примере двумерного пространства переменных состояния. Для этого используем уравнение Фишера, которое устанавливает, что текущая мгновенная номинальная процентная ставка $r(t)$ является суммой текущей мгновенной реальной процентной ставки $R(t)$ и текущей нормы инфляции $\pi(t)$:

$$r(t) = R(t) + \pi(t)\,. \tag{1.10}$$

Реальная процентная ставка $R(t)$ обычно определяется как предельный продукт капитала в моделях экономики одного товара. *Норма инфляции* (*rate of inflation*) является темпом роста уровня цен $C(t)$, который определяется как денежная цена единицы товара потребления:

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \pi(t)dt\,. \tag{1.11}$$

Таким образом, $r(t)$ можно рассматривать как сумму реального и номинального эффектов.

В детерминированном случае разумно предположить, что реальный и номинальный эффекты разделяются. Поэтому предполагается, что динамика поведения R и π описывается парой автономных дифференциальных уравнений:

$$dR = \alpha_R(R)\,dt, \tag{1.12}$$

$$d\pi = \alpha_\pi(\pi)\,dt. \tag{1.13}$$

Функции α_R и α_π являются соответственно мгновенными скоростями изменения R и π.

Описание динамики автономными дифференциальными уравнениями (1.12) и (1.13) неявно предполагает три обстоятельства. Во-первых, не имеется никаких таких календарных временных изменений в процентных ставках, какие, например, могут быть вызваны сезонностью. Во-вторых, экономические показатели изменяются со временем гладко, без скачков в каждом маргинальном продукте капитала или норме инфляции. В-третьих (наиболее ограничительное предположение), не имеется никаких других переменных, например темпа роста трудовых ресурсов или предвидимой политики финансового руководства, систематически влияющих на динамику R и π.

Переменные $R(t)$ и $\pi(t)$ являются переменными состояния рассматриваемой модели, в которой они обеспечивают достаточную информацию о состоянии экономики для определения временной структуры. Переменные состояния таковы, что если в два различных момента календарного времени экономика находится в некотором конкретном состоянии (т. е. $R(t)$ и $\pi(t)$ принимают некоторые конкретные значения), то временная структура одинакова в оба эти момента времени. Более того, временная структура является независимой от траектории, по которой она двигалась в пространстве переменных состояния до того, как они приняли свои текущие значения. Следует заметить, что в общей теории рыночного равновесия $R(t)$ и $\pi(t)$ были бы сами функциями каких-либо других переменных состояния, таких, как акционерный капитал, население, накопленный правительственный дефицит, денежные резервы и рациональная предвидимая правительственная финансовая и валютная политика.

Однако нашей целью является построение модели ценообразования долгосрочных дисконтируемых облигаций в условиях рыночного равновесия, поэтому представляется целесообразным принять в качестве переменных состояния только $R(t)$ и $\pi(t)$ как разумный компромисс между сложностью и доступностью понимания. С одной стороны, характеризация временной структуры с помощью одной переменной, скажем $r(t)$, является слишком элементарной: всякий раз, когда $r(t)$ принимает одинаковые значения, временная структура должна быть также одинаковой. С другой стороны, увеличение числа переменных (больше двух) дает большую гибкость в характеризации временной структуры, но ценой этого является более сложный анализ без какого-либо соразмерного с этим усилия в проникновение сути. Вместе с тем последующее изложение показывает, что увеличение размерности пространства состояний не изменит принципов анализа, увеличив только сложность.

Итак, в предположении, что переменными состояния являются $R(t)$ и $\pi(t)$, обозначение цены дисконтируемой облигации можно переписать, чтобы явно показать зависимость от этих переменных:

$$P(R(t), \pi(t), t, T) \equiv P(t, T).$$

Доходность облигации с датой погашения T равна

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial R}dR + \frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \pi}d\pi + \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}dt. \tag{1.14}$$

Первое слагаемое правой части (1.14) представляет изменение цены облигации, вызванное изменением краткосрочной реальной процентной ставки; второе – изменение, вызванное изменением темпа инфляции; третье слагаемое – изменение, вызванное приближением к погашению.

Несмотря на то что мы уже имеем выражение для цены облигации в форме (1.6), полезно в детерминированном случае также обосновать это выражение, исходя из уравнения (1.14). В детерминированном случае при рыночном равновесии все облигации должны иметь одинаковые мгновенные доходности $r(t)$, чтобы предотвратить безрисковый арбитраж, т. е.

$$\frac{dP}{P} = rdt. \tag{1.15}$$

Приравняв правые части уравнений (1.14) и (1.15) и подставив в полученное равенство выражения (1.12) и (1.13), получим соотношение

$$\alpha_R(R)\frac{\partial P(R,\pi,t,T)}{\partial R} + \alpha_\pi(\pi)\frac{\partial P(R,\pi,t,T)}{\partial \pi} + \frac{\partial P(R,\pi,t,T)}{\partial t} -$$

$$-(R+\pi)P(R,\pi,t,T) = 0, \tag{1.16}$$

которое можно рассматривать как уравнение в частных производных относительно цены облигации. Это уравнение вместе с заданными граничными условиями $P(R, \pi, t, t) = 1$ и $P \geq 0$ полностью определяет цены облигаций.

Сравнивая выражения (1.16) и (1.5), мы видим, что эти два уравнения для цен облигаций не кажутся идентичными. Однако это впечатление обманчиво, поскольку они имеют одинаковые решения. Чтобы показать это, рассмотрим функцию $x(s)$, определяемую выражением

$$x(s) = P(R, \pi, s, T)\exp\left[-\int_t^s \left(R(u)+\pi(u)\right)du\right]. \tag{1.17}$$

Дифференцирование ее по t дает

$$\frac{dx(s)}{dt} = \left[\alpha_R\frac{\partial P}{\partial R} + \alpha_\pi\frac{\partial P}{\partial \pi} + \frac{\partial P}{\partial t} - (R+\pi)P\right]\exp\left[-\int_t^s \left(R(u)+\pi(u)\right)du\right] = 0, \tag{1.18}$$

где второе равенство следует из выражения (1.16). Из равенства (1.18) вытекает, что

$$x(t) = x(T). \tag{1.19}$$

Подстановка представления (1.17) в (1.19) дает

$$P(R, \pi, t, T) = \exp\left[-\int_t^T \bigl(R(s) + \pi(s)\bigr)ds\right] = \exp\left[-\int_t^T r(s)ds\right], \tag{1.20}$$

что и требовалось доказать.

Имеются две полезные интерпретации формулы для цены облигации. Первая из них показывает, что временная структура в действительности является суммой реальной временной структуры и временной структуры инфляции. Подставляя (1.20) в формулу (1.1), находим, что

$$y(R,\pi,t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T R(s)ds + \frac{1}{T-t}\int_t^T \pi(s)ds,$$

т. е. доходность на интервале времени $[t, T]$ является суммой реальной доходности и доходности, обязанной инфляции, в течение этого интервала. Мы видим, что имеются две кривые доходности, одна для R и другая для π. Следовательно, существуют две временные структуры. Первая является временной структурой реальной ставки возмещения капитала, а вторая – временной структурой полных издержек при хранении денег (или возмещения от хранения материальных товаров).

Вторая полезная интерпретация показывает, что текущая реальная цена облигации является настоящей стоимостью будущей реальной выручки от облигации. Уровень потребительских цен в момент T можно найти путем решения уравнения (1.11)

$$C(T) = C(t)\exp\left[\int_t^T \pi(s)ds\right]. \tag{1.21}$$

Перемножив выражения (1.20) и (1.21) и преобразовав полученное равенство, получим

$$\frac{P(R,\pi,t,T)}{C(t)} = \frac{1}{C(T)}\exp\left[-\int_t^T R(s)ds\right]. \tag{1.22}$$

Левая часть равенства (1.22) является текущей реальной ценой облигации, которая равна реальной выручке $1/C(T)$ в момент T, дисконтированной согласно реальной процентной ставке.

Пример 4. Для иллюстрации использования формулы определения цены облигации рассмотрим в качестве примера дифференциальные уравнения для R и π:

$$dR = -a(R - R^*)\,dt \tag{1.23}$$

и

$$d\pi = -c(\pi - \pi^*)\,dt. \tag{1.24}$$

Из сравнения формул (1.23) и (1.24) с формулами (1.12) и (1.13) заключаем, что $\alpha_R = -a(R - R^*)$ и $\alpha_\pi = -c(\pi - \pi^*)$. Такие процессы появляются в модели установления равновесия, когда экономика находится в процессе приближения к устойчивому состоянию, в котором реальная процентная ставка будет равна R^*, а ставка инфляции – π^*. (Обычно установившийся темп инфляции определяется решением руководства денежно-кредитной системы.) Параметры a и c определяют скорость процесса приближения к устойчивому состоянию. Решениями уравнений (1.23) и (1.24) при $R(t) = R$ и $\pi(t) = \pi$ являются функции

$$R(s) = R^* + (R - R^*)\exp[-a(s - t)] \tag{1.25}$$

и

$$\pi(s) = \pi^* + (\pi - \pi^*)\exp[-c(s - t)]. \tag{1.26}$$

Подстановка выражений (1.25) и (1.26) в формулу (1.20) дает цены дисконтируемых облигаций как функции R, π и времени до погашения $\tau = T - t$:

$$P(R,\pi,\tau) = \exp\left[-(R^* + \pi^*)\tau - (R - R^*)\frac{1 - e^{-a\tau}}{a} - (\pi - \pi^*)\frac{1 - e^{-c\tau}}{c}\right]. \tag{1.27}$$

Кривая доходности, соответствующая структуре (1.27), выражается в виде

$$y(R,\pi,\tau) = R^* + (R - R^*)\frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} + \pi^* + (\pi - \pi^*)\frac{1 - e^{-c\tau}}{c\tau}. \tag{1.28}$$

Мы видим, что номинальная доходность равна сумме реальной доходности и доходности, вызванной инфляцией. Доходность достигает $r^* = R^* + \pi^*$ при неограниченном увеличении срока погашения. Это естественно, так как с течением времени R приближается к R^*, а π приближается к π^*.

Кривая доходности этого примера будет полезной при сравнении с соответствующими примерами кривой доходности в условиях неопределенности, когда процессы установления случайные. Доходности, вычисляемые по формуле (1.28), для любых сроков погашения являются возрастающими функциями от R, R^*, π и π^*, поскольку

$$\frac{\partial y}{\partial R} = \frac{1-e^{-a\tau}}{a\tau} > 0, \quad \frac{\partial y}{\partial R^*} = 1 - \frac{1-e^{-a\tau}}{a\tau} > 0 \quad \text{для всех} \quad \tau > 0$$

и

$$\frac{\partial y}{\partial \pi} = \frac{1-e^{-c\tau}}{c\tau} > 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \pi^*} = 1 - \frac{1-e^{-c\tau}}{c\tau} > 0 \quad \text{для всех} \quad \tau > 0.$$

Так как $\partial y/\partial R \neq \partial y/\partial \pi$, если $a \neq c$, то увеличение по R и π не гарантирует, что доходность будет увеличиваться при разных темпах увеличения по R и по π. В общем случае кривая доходности может увеличиваться, уменьшаться или иметь экстремум при увеличении срока погашения, как это можно видеть из равенства

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{R-R^*}{a\tau^2}\left[a\tau\ e^{-a\tau} + e^{-a\tau} - 1\right] + \frac{\pi - \pi^*}{c\tau^2}\left[c\tau\ e^{-c\tau} + e^{-c\tau} - 1\right].$$

В определенных случаях временная структура описывается монотонной функцией τ. Например, если $R > R^*$ и $\pi > \pi^*$, она является уменьшающейся; если $R = R^*$ и $\pi = \pi^*$, она оказывается константой; если $R < R^*$ и $\pi < \pi^*$ она становится возрастающей. Временная структура будет немонотонной только в случаях, когда $(R - R^*)$ и $(\pi - \pi^*)$ имеют разные знаки, а скорости установления a и c являются различными. Наконец, можно легко проверить, что мгновенные форвардные ставки равны будущим мгновенным спот ставкам.

1.2 ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

Чтобы лучше понять как разрабатывается модель временной структуры (*term structure*) процентных ставок (*interest rates*) в условиях неопределенности, полезно рассмотреть модель временной структуры в детерминированном случае. В детерминированной среде легче объяснить (и понять) различные тенденции, формирующие временную структуру, и, в частности, вышеупомянутое предположение относительно будущих процентных ставок, называемое «гипотезой ожидания». Таким образом, этот раздел служит своего рода путеводителем для более трудного материала при изучении временной структуры процентных ставок в условиях неопределенности в стохастическом случае.

Дисконтируемая облигация (*discount bond*), с датой погашения T, является ценной бумагой, по которой выплачивается 1 денежная единица в дату T и ничего в любое другое время. Обозначим цену этой облигации в момент $t \le T$ через $P(t,T)$. Тогда условие погашения получается в виде

$$P(T,T) = 1. \tag{1}$$

Доходностью до погашения (*yield to maturity*) $y(t,T)$ называется непрерывно конвертируемая доходность (*rate of return*), вызывающая повышение цены облигации до единицы в дату T,

$$P(t,T)\exp\{(T-t)\,y(t,T)\} \equiv 1\,; \tag{2}$$

разрешая это тождество относительно доходности, находим, что

$$y(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{3}$$

Для фиксированного t вид $y(t,T)$ при увеличении T определяет временную структуру процентной ставки или, что то же самое, кривую доходности (*yield curve*). Из формулы (3) ясно, что временная структура может быть увеличивающейся или уменьшающейся функцией T в зависимости от структуры равновесных цен облигаций, т. е. цен на рынке, который находится в состоянии равновесия. В общем случае для любых заданных дат погашения T доходность является положительной или отрицательной в зависимости от того, будет ли $P(t,T)$ меньше, чем 1, или больше, чем 1, соответственно.

Понятием, имеющим большую важность, является краткосрочная или спот (*short*, *spot*) процентная ставка. Краткосрочная процентная ставка – это доходность облигации, погашаемой через очень короткий срок после текущего момента времени. Отсюда, обозначая спот ставку в момент t через $r(t)$, получаем

$$r(t) \equiv y(t,t) . \tag{4}$$

Спот ставка равна скорости, с которой цена облигации, погашаемой в момент времени t, достигает единицы, как можно увидеть, переходя в формуле (3) к пределу при $t \to T$ и применяя правило Лопиталя,

$$r(T) = \left.\frac{\partial P(t,T)}{\partial t}\right|_{t=T} \quad \text{для всех } T . \tag{5}$$

Краткосрочная процентная ставка $r(t)$ является нормой прибыли (доходностью), с которой инвесторы могут зарабатывать в течение очень короткого интервала времени, следующего за моментом t. Поэтому она иногда называется мгновенной.

Пусть инвестор в настоящий момент времени владеет облигацией, погашаемой во время T_1. С какой доходностью он зарабатывал бы выручку от этой облигации между датами T_1 и $T_2 > T_1$, если он обладает сведениями о доходностях сейчас, во время t? Ответом является форвардная процентная ставка (*forward interest rate*). Форвардная процентная ставка $f(t,T_1,T_2)$ - это процентная ставка для будущего периода (T_1,T_2) относительно $t < T_1$, которая приравнивает полный доход долгосрочной облигации к доходу стратегии прокручивания краткосрочных облигаций. Форвардная ставка выводится из временной структуры (кривой доходности), имеющейся в настоящее время t. В нашем случае $f(t,T_1,T_2)$ определяется тождеством

$$P(t,T_1) \equiv P(t,T_2)\exp\{(T_2 - T_1) f(t,T_1,T_2)\} , \tag{6}$$

разрешая которое относительно $f(t,T_1,T_2)$, получим

$$f(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\right] . \tag{7}$$

То, что форвардная ставка представляет в текущий момент времени t доходность на безрисковую дисконтируемую облигацию в течение времени от T_1 до T_2, можно видеть, рассматривая следующие возможные сделки в момент t. Купим N облигаций, погашаемых во время T_2, отдав за них $NP(t,T_2)$ долларов. Эти облигации принесут нам N долларов в момент T_2. Сколько стоили бы с учетом ситуации, сложившейся на рынке в настоящее время t, облигации, которые нам нужно будет купить в момент времени T_1 для получения в момент T_2 этой же суммы? Они будут стоить некоторую сумму $NP(T_1,T_2|t)$. Отсюда следует, что для получения этой суммы в момент T_1 нам следует купить в текущий момент времени t $NP(T_1,T_2|t)$ облигаций по цене $P(t,T_1)$. Таким образом, для получения N долларов в момент времени T_2 мы можем использовать два способа: купить N облигаций по цене $P(t,T_2)$ или же купить $NP(T_1,T_2|t)$ облигаций по цене $P(t,T_1)$. Так как эти два способа дают один и тот же результат, на равновесном рынке обе инвестиции в момент времени t должны быть одинаковы, что приводит к равенствам $NP(t,T_2) = NP(T_1,T_2|t)P(t,T_1)$, или $P(T_1,T_2|t) = P(t,T_2)/P(t,T_1)$. Но левая часть последнего равенства имеет смысл цены облигации, покупаемой в момент T_1 с датой погашения T_2. Поэтому, обозначая через $f(t,T_1,T_2)$ доходность до погашения этой облигации, когда она рассчитывается с учетом ситуации, сложившейся на рынке в настоящее время t, т. е. форвардную ставку, и используя формулу (3) для подсчета этой доходности, получим формулу (7) в следующем виде

$$f(t,T_1,T_2) = -\frac{\ln P(T_1,T_2|t)}{T_2 - T_1} = \frac{1}{T_2 - T_1}\ln\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\right].$$

Форвардная ставка $f(t,T_1,T_2)$ является просто ставкой процентов, заработанных на инвестицию $P(T_1,T_2|t)$. Следует подчеркнуть еще раз, что для всяких T_1 и T_2 форвардные ставки вычисляются только через рыночные цены, имеющиеся в наличии в момент t.

Частным случаем является мгновенная форвардная ставка

$$f(t,T) = f(t,T,T), \tag{8}$$

которая представляет собой мгновенную доходность, с которой владелец контракта может зарабатывать, распространяя действие своей инвестиции на очень короткий временной интервал (мгновение) после T. Переходя к пределу $T_1 \to T_2 = T$ в формуле (7) и используя правило Лопиталя, находим

$$f(t,T) = -\frac{1}{P(t,T)}\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}. \tag{9}$$

Таким образом, функция текущей цены облигации полностью определяет все мгновенные форвардные ставки.

Обычно принимается, что в детерминированном случае при равновесии на рынке все ценные бумаги должны иметь одинаковые мгновенные доходности, чтобы исключить арбитражные возможности. (Более подходящим было бы назвать это принципом равных доходностей.) Применение этого условия равновесия к дисконтируемым облигациям требует, чтобы удовлетворялось равенство

$$\frac{\partial P(t,T)}{\partial t} - r(t)P(t,T) = 0 \tag{10}$$

в любой момент времени t и для всех $T > t$. Единственным решением уравнения (10), удовлетворяющим граничным условиям $P(T,T) = 1$ и $P(t,T) \geq 0$, является

$$P(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T r(s)ds\right\}. \tag{11}$$

Формула (11) для цен облигаций говорит о том, что изменения спот ставки полностью определяют все цены облигаций в течение всего времени. Эта формула определения цены является относительной, так как она предполагает, что процесс для $r(s)$ задан, и определяет цены облигаций по отношению к этому процессу. Действительно, чтобы определить $P(t,T)$, нам нужно знать только изменение $r(s)$ на интервале времени $[t,T]$. Доходность до погашения (*yield to maturity*) на облигацию, погашаемую в дату T, является средним значением спот ставок на интервале времени от t до T, как это можно видеть, подставляя (11) в формулу (3),

$$y(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T r(s)ds\ . \tag{12}$$

Поэтому временная структура процентных ставок между датами t и T зависит только от изменения спот ставки в течение этого интервала.

Каково соотношение между мгновенными спот ставками и мгновенными форвардными ставками? Они, конечно, равны, как можно заметить, подставляя (11) в формулу (9) и получая

$$f(t,T) = r(T) \quad \text{и} \quad f(t,T) = f(0,T) \qquad \text{для всех} \quad T \geq t \geq 0\,. \tag{13}$$

Равенство (13) является детерминированной формой однопериодной (в нашем случае мгновенной) «гипотезы ожидания». Эта гипотеза состоит в том, что ожидаемые будущие мгновенные спот ставки в момент T равны непрерывно вычисляемым мгновенным форвардным ставкам в момент T. Эта формулировка является вырожденной формой гипотезы ожиданий, так как в детерминированном случае ожидаемая спот ставка совпадает с фактической спот ставкой.

Аналогично для любого t форвардная ставка между T_1 и T_2 всегда равна доходности, которая будет иметься в момент T_1 на облигацию, погашаемую в момент T_2. Это можно увидеть, подставив цену облигации, определяемую формулой (11), в равенство (7) и сравнивая полученное выражение с (12), то есть

$$f(t,T_1,T_2) = y(T_1,T_2)\ . \tag{14}$$

Как и в случае мгновенных ставок, уравнение (14) является вырожденной формой многопериодной гипотезы ожиданий, которая требует, чтобы ожидаемые будущие доходности равнялись непрерывно вычисляемым форвардным ставкам в течение такого же по длительности, но произвольного, интервала времени.

В детерминированном случае стратегия прокрутки краткосрочных позиций эквивалентна покупке и владению долгосрочной позиции. С одной стороны, если $P(t,T)$ долларов инвестируются в момент t в облигацию с датой погашения T, то инвестор получит 1 доллар в момент T. С другой стороны, если инвестор вложит ту же самую сумму в мгновенно погашаемые (то есть с очень коротким сроком погашения) безрисковые облигации и будет непрерывно реинвестировать выручку в мгновенно погашаемые безрисковые облигации (это называется прокруткой краткосрочной позиции, *rolling over short-term position*), то к моменту T он накопит

$$P(t,T)\exp\left\{\int_t^T r(s)ds\right\} = \$1\ .$$

Итак, структура с текущим сроком полностью определяет все структуры с будущими сроками. Это происходит потому, что структура с текущим сроком дает все будущие мгновенные спот процентные ставки (по формуле (5)), а все структуры с будущими сроками определяются будущими мгновенными спот процентными ставками (как видно из (12)).

Подведем итог полученным результатам:

- временная структура в детерминированном случае дается функциональным отображением (12) функции мгновенной спот ставки в долгосрочную доходность;
- ставки доходности для интервала любой продолжительности для всех имеющихся у инвестора облигаций одинаковы и, в частности, равны мгновенной (то есть для очень короткого интервала) ставке доходности;
- все формы гипотезы ожидания справедливы;
- стратегия прокрутки краткосрочной позиции эквивалентна покупке и владению долгосрочной позицией;
- текущая временная структура полностью определяет все будущие временные структуры.

Таким образом, знание будущих мгновенных процентных ставок является достаточным, чтобы определять всю временную структуру процентных ставок для всех сроков. В свою очередь, естественно спросить «Что нужно знать, чтобы определить будущие мгновенные процентные ставки?».

Чтобы ответить на этот вопрос, приходится усложнять модель, увеличивая ее размерность, вводя другие основные переменные состояния, которые определяли бы значения краткосрочной процентной ставки $r(t)$. Покажем это на примере двумерного пространства переменных состояния. Для этого используем уравнение Фишера, которое устанавливает, что текущая мгновенная номинальная процентная ставка $r(t)$ является суммой текущей мгновенной реальной процентной ставки $R(t)$ и текущей нормы инфляции $\pi(t)$

$$r(t) = R(t) + \pi(t) . \tag{15}$$

Реальная процентная ставка $R(t)$ обычно определяется как предельный продукт капитала в моделях экономики одного товара. Норма инфляции (*rate of inflation*) является темпом роста уровня цен $C(t)$, который определяется как денежная цена единицы товара потребления:

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \pi(t)dt . \tag{16}$$

Таким образом, $r(t)$ можно рассматривать как сумму реального и номинального эффектов.

В детерминированном случае разумно предположить, что реальный и номинальный эффекты разделяются. Поэтому предполагается, что динамика поведения R и π описывается парой автономных дифференциальных уравнений

$$dR = \alpha_R(R)\, dt , \tag{17}$$

$$d\pi = \alpha_\pi(\pi)\, dt . \tag{18}$$

Функции α_R и α_π являются мгновенными скоростями изменения R и π, соответственно.

Описание динамики автономными дифференциальными уравнениями (17) и (18) неявно предполагает три обстоятельства. Во-первых, не имеется никаких таких календарных временных изменений в процентных ставках, какие, например, могут быть вызваны сезонностью. Во-вторых, экономические показатели изменяются со временем гладко, без скачков в каждом маргинальном продукте капитала или норме инфляции. В-третьих (наиболее ограничительное предположение), не имеется никаких других переменных, например, темпа роста трудовых ресурсов или предвидимой политики финансового руководства, систематически влияющих на динамику R и π.

Переменные $R(t)$ и $\pi(t)$ являются переменными состояния рассматриваемой модели, в которой они обеспечивают достаточную информацию о состоянии экономики для определения временной структуры. Переменные состояния являются такими, что если в два различных момента календарного времени экономика находится в некотором конкретном состоянии (то есть $R(t)$ и $\pi(t)$ принимают некоторые конкретные значения), то временная структура является одинаковой в оба эти момента времени. Более того, временная структура является независимой от траектории, по которой она двигалась в пространстве переменных состояния до того, как они приняли свои текущие значения. Следует заметить, что в общей теории рыночного равновесия $R(t)$ и $\pi(t)$ были бы сами функциями каких либо других переменных состояния таких, как акционерный капитал, население, накопленный правительственный дефицит, денежные резервы и рациональная предвидимая правительственная финансовая и валютная политика.

Однако нашей целью является построение модели ценообразования долгосрочных дисконтируемых облигаций в условиях рыночного равновесия, поэтому представляется целесообразным принять в качестве переменных состояния только $R(t)$ и $\pi(t)$ как разумный компромисс между сложностью и доступностью понимания. С одной стороны, характеризация временной структуры с помощью одной переменной, скажем $r(t)$, является слишком элементарной: всякий раз, когда $r(t)$ принимает одинаковые значения, временная структура должна быть также одинаковой. С другой стороны, увеличение числа переменных (больше двух) дает большую гибкость в характеризации временной структуры, но ценой этого является более сложный анализ без какого либо соразмерного с этим усиления в проникновение сути. Вместе с тем последующее изложение показывает, что увеличение размерности пространства состояний не изменит принципов анализа, увеличив только сложность.

Итак, в предположении, что переменными состояния являются $R(t)$ и $\pi(t)$, обозначение цены дисконтируемой облигации можно переписать, чтобы явно показать зависимость от этих переменных

$$P(R(t), \pi(t), t, T) \equiv P(t,T) . \tag{19}$$

Доходность облигации с датой погашения T равна

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial R}dR + \frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \pi}d\pi + \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial t}dt . \tag{20}$$

Первое слагаемое правой части (20) представляет изменение цены облигации, вызванное изменением краткосрочной реальной процентной ставки; второе слагаемое представляет изменение, вызванное изменением темпа инфляции; третье слагаемое представляет изменение, вызванное приближением к погашению.

Несмотря на то, что мы уже имеем выражение для цены облигации в форме (11), полезно в детерминированном случае также обосновать это выражение, исходя из уравнения (20). В детерминированном случае при рыночном равновесии все облигации должны иметь одинаковые мгновенные доходности $r(t)$, чтобы предотвратить безрисковый арбитраж, то есть

$$\frac{dP}{P} = rdt \ . \tag{21}$$

Приравнивая правые части уравнений (20) и (21) и подставляя в полученное равенство выражения (17) и (18), получим соотношение

$$\alpha_R(R)\frac{\partial\, P(R,\pi,t,T)}{\partial\, R} + \alpha_\pi(\pi)\frac{\partial\, P(R,\pi,t,T)}{\partial\, \pi} + \frac{\partial\, P(R,\pi,t,T)}{\partial\, t} -$$

$$- (R+\pi)\, P(R,\, \pi,\, t,\, T) = 0\ , \tag{22}$$

которое можно рассматривать как уравнение в частных производных относительно цены облигации. Это уравнение вместе с граничными условиями $P(R, \pi, t, t) = 1$ и $P \geq 0$ полностью определяет цены облигаций.

Сравнивая выражения (22) и (10) мы видим, что эти два уравнения для цен облигаций не кажутся идентичными. Однако, это впечатление является обманчивым, поскольку они имеют одинаковые решения. Чтобы показать это, рассмотрим функцию $x(s)$ определяемую выражением

$$x(s) = P(R,\, \pi,\, s,\, T)\exp\left[-\int_t^s \left(R(u)+\pi(u)\right)du\right]. \tag{23}$$

Дифференцирование ее по t дает

$$\frac{dx(s)}{dt} = \left[\alpha_R\frac{\partial\, P}{\partial\, R} + \alpha_\pi\frac{\partial\, P}{\partial\, \pi} + \frac{\partial\, P}{\partial\, t} - (R+\pi)P\right]\exp\left[-\int_t^s \left(R(u)+\pi(u)\right)du\right] = 0 \tag{24}$$

где второе равенство следует из выражения (22). Из равенства (24) вытекает, что

$$x(t) = x(T)\ . \tag{25}$$

Подстановка представления (23) в (25) дает

$$P(R,\, \pi,\, t,\, T) = \exp\left[-\int_t^T \left(R(s)+\pi(s)\right)ds\right] = \exp\left[-\int_t^T r(s)ds\right], \tag{26}$$

что и требовалось доказать.

Имеется две полезных интерпретации формулы для цены облигации. Первая из них показывает, что временная структура в действительности является суммой реальной временной структуры и временной структуры инфляции. Подставляя (26) в формулу (3), находим, что

$$y(R,\pi,t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T R(s)ds + \frac{1}{T-t}\int_t^T \pi(s)ds \ . \tag{27}$$

Т. е. доходность на интервале времени $[t, T]$ является суммой реальной доходности и доходности, обязанной инфляции, в течение этого интервала. Мы видим, что имеется две кривые доходности, одна для R и другая для π. Следовательно, существует две временных структуры. Первая является временной структурой реальной ставки возмещения капитала, а вторая – временной структурой полных издержек при хранении денег (или возмещения от хранения материальных товаров).

Вторая полезная интерпретация показывает, что текущая реальная цена облигации является настоящей стоимостью будущей реальной выручки от облигации. Уровень потребительских цен в момент T можно найти путем решения уравнения (16)

$$C(T) = C(t)\exp\left[\int_t^T \pi(s)ds\right] . \tag{28}$$

Перемножая выражения (28) и (26) и преобразовывая полученное равенство, получим

$$\frac{P(R,\pi,t,T)}{C(t)} = \frac{1}{C(T)}\exp\left[-\int_t^T R(s)ds\right] . \tag{29}$$

Левая часть равенства (29) является текущей реальной ценой облигации, которая равна реальной выручке $1/C(T)$ в момент T, дисконтированной согласно реальной процентной ставке.

Пример. Для иллюстрации использования формулы определения цены облигации рассмотрим в качестве примера дифференциальные уравнения для R и π:

$$dR = -a(R - R^*)\,dt \tag{30}$$

и

$$d\pi = -c(\pi - \pi^*)\,dt \tag{31}$$

Отсюда видно, что $\alpha_R = -a(R - R^*)$ и $\alpha_\pi = -c(\pi - \pi^*)$. Такие процессы появляются в модели установления равновесия, когда экономика находится в процессе приближения к устойчивому состоянию, в котором реальная процентная ставка будет равна R^*, а ставка инфляции будет равна π^*. (Обычно установившийся темп инфляции определяется решением руководства денежно-кредитной системы.) Параметры a и c определяют скорость процесса приближения к устойчивому состоянию. Решениями уравнений (30) и (31) при $R(t) = R$ и $\pi(t) = \pi$ являются функции

$$R(s) = R^* + (R - R^*)\exp[-a(s - t)] \tag{32}$$

и

$$\pi(s) = \pi^* + (\pi - \pi^*)\exp[-c(s - t)]\ . \tag{33}$$

Подстановка выражений (32) и (33) в формулу (26) дает цены дисконтируемых облигаций как функции R , π и времени до погашения $\tau = T - t$,

$$P(R,\pi,\tau) = \exp\left[-(R^* + \pi^*)\tau - (R - R^*)\frac{1 - e^{-a\tau}}{a} - (\pi - \pi^*)\frac{1 - e^{-c\tau}}{c}\right]. \tag{34}$$

Кривая доходности, соответствующая структуре (34) выражается в виде

$$y(R,\pi,\tau) = R^* + (R - R^*)\frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} + \pi^* + (\pi - \pi^*)\frac{1 - e^{-c\tau}}{c\tau}\ . \tag{35}$$

Мы видим, что номинальная доходность равна сумме реальной доходности и доходности, вызванной инфляцией. Доходность достигает $r^* = R^* + \pi^*$ при неограниченном увеличении срока погашения. Это является естественным, так как с течением времени R приближается к R^*, а π приближается к π^*.

Кривая доходности этого примера будет полезной при сравнении с соответствующими примерами кривой доходности в условиях неопределенности, когда процессы установления являются случайными. Доходности, вычисляемые по формуле (35), для любых сроков погашения являются увеличивающимися функциями от R , R^*, π и π^*, поскольку

$$\frac{\partial y}{\partial R} = \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} > 0\ ,\ \frac{\partial y}{\partial R^*} = 1 - \frac{1 - e^{-a\tau}}{a\tau} > 0 \quad \text{для всех} \quad \tau > 0;$$

и

$$\frac{\partial y}{\partial \pi} = \frac{1 - e^{-c\tau}}{c\tau} > 0\ ,\ \frac{\partial y}{\partial \pi^*} = 1 - \frac{1 - e^{-c\tau}}{c\tau} > 0 \quad \text{для всех} \quad \tau > 0.$$

Так как $\partial y/\partial R \neq \partial y/\partial \pi$, если $a \neq c$, то увеличение по R и π не гарантирует, что доходность будет увеличиваться при разных темпах увеличения по R и увеличения по π. В общем случае кривая доходности может увеличиваться, уменьшаться или иметь горб при увеличении срока погашения, как это можно видеть из равенства

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{R - R^*}{a\tau^2}\left[a\tau\ e^{-a\tau} + e^{-a\tau} - 1\right] + \frac{\pi - \pi^*}{c\tau^2}\left[c\tau\ e^{-c\tau} + e^{-c\tau} - 1\right].$$

В определенных случаях временная структура описывается монотонной функцией τ. Например, если $R > R^*$ и $\pi > \pi^*$ она является уменьшающейся; если $R = R^*$ и $\pi = \pi^*$ она оказывается константой; если $R < R^*$ и $\pi < \pi^*$ она становится увеличивающейся. Временная структура будет немонотонной только в случаях, когда $(R - R^*)$ и $(\pi - \pi^*)$ имеют разные знаки, а скорости установления a и c являются различными. Наконец, можно легко проверить, что мгновенные форвардные ставки равны будущим мгновенным спот ставкам.

2. МОДЕЛИ НЕПРЕРЫВНОГО ВРЕМЕНИ

2.1 МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА

Ввиду своей относительной простоты модель Васичека (Vasiček, 1977) является одной из наиболее популярных моделей определения цены актива.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим рынок, где инвесторы покупают и выпускают для продажи свободные от неуплаты ценные бумаги на фиксированную сумму денег, которая должна быть доставлена в заданную дату в будущем. Такие бумаги будем называть (дисконтируемыми) облигациями. Пусть $P(t,T)$ обозначает цену, наблюдаемую в момент времени t, $t \le T$, дисконтированной облигации, погашаемой в момент времени T, с единичной стоимостью погашения

$$P(T, T) = 1.$$

Доходность до погашения $y(t, T)$ является внутренней нормой отдачи в момент t на облигацию с датой погашения T:

$$y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T), \qquad t < T. \tag{2.1}$$

Ставки $y(t, t+\tau)$, $\tau = T - t > 0$, рассматриваемые как функции τ, будут называться временной структурой в момент времени t.

Форвардная ставка $F(t, s)$ определяется равенством

$$y(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T F(t,s)ds. \tag{2.2}$$

Это уравнение может быть переписано в форме, задающей форвардную ставку явно:

$$F(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\left[(T-t)y(t,T)\right]. \tag{2.3}$$

Форвардная ставка может быть интерпретирована как предельная доходность (норма отдачи) от инвестиции в облигацию за очень короткий (инфинитезимальный) временной интервал, следующий сразу после погашения.

Теперь определим краткосрочную процентную ставку как мгновенную спот ставку (или ставку непрерывного конвертирования банковского счета):

$$r(t) = y(t,t) = \lim_{\tau \to 0} y(t, t+\tau).$$

Таким образом, сумма счета V при краткосрочной ставке $r(t)$ будет увеличиваться по стоимости посредством приращений

$$dV = V\, r(t)\, dt\,. \tag{2.4}$$

Это равенство выполняется с достоверностью. В любой момент времени t текущее значение $r(t)$ краткосрочной ставки является мгновенной ставкой увеличения стоимости счета. Однако значения краткосрочной ставки в последовательные интервалы времени не обязательно оказываются вполне определенными. Мы будем предполагать, что ставка $r(t)$ – это стохастический процесс, подчиняющийся двум требованиям: во-первых, $r(t)$ является непрерывной функцией времени, то есть она не изменяется по величине скачкообразно; во-вторых, предполагается, что она следует марковскому процессу. При этих предположениях будущее развитие краткосрочной ставки дается ее настоящей стоимостью и не зависит от прошлого поведения, которое привело ее к настоящему значению. Таким образом, делается следующее предположение:

(A.1). *Краткосрочная ставка следует непрерывному марковскому процессу.*

Марковское свойство подразумевает то, что будущее развитие процесса краткосрочной ставки характеризуется скалярной переменной состояния, которой является ее текущая величина. Таким образом, распределение вероятностей будущих значений ставки $\{r(s)\ ,\ s \geq t\}$ полностью определяется значением $r(t)$.

Непрерывные марковские процессы обычно называются диффузионными процессами. Они описываются стохастическими дифференциальными уравнениями вида

$$dr = \mu_r(r, t)\, dt + \sigma_r(r, t)\, dW(t), \tag{2.5}$$

где $dW(t)$ является приращением стандартного винеровского процесса, имеющим нулевое среднее и дисперсию dt. Функции $\mu_r(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$ являются соответственно мгновенными *дрейфом* (*drift*) и *волатильностью* (*volatility*) процесса $r(t)$.

Естественно ожидать, что цена дисконтированной облигации будет определяться исключительно краткосрочной процентной ставкой в течение ее срока действия или, более точно, текущей оценкой будущей траектории краткосрочной ставки в течение срока действия облигации. Никакого конкретного вида этой траектории не предполагается. Таким образом, второе предположение можно сформулировать следующим образом.

(A.2). *Цена* $P(t,T)$ *дисконтированной облигации в момент* t *определяется через оценку будущих значений* $\{r(s),\ t \le s \le T\}$ *процесса краткосрочной ставки в течение срока действия облигации.*

Можно заметить, что гипотеза ожидания, гипотеза рыночной сегментации и гипотеза предпочтения ликвидности согласуются с предположением (A.2), так как все они постулируют, что

$$y(t,T) = E_t\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+T} r(\tau)\,d\tau\right) + \overline{\pi}\big(t,T,r(t)\big)$$

с различными определениями функции $\overline{\pi}$.

Наконец, будем предполагать, что справедливо следующее.

(A.3). *Рынок является эффективным, т. е. нет никаких расходов на сделки, информация доступна всем инвесторам одновременно и каждый инвестор действует рационально (предпочитает большее богатство меньшему и использует всю доступную информацию).*

Предположение (A.3) свидетельствует о том, что инвесторы имеют однородные ожидания и что невозможен какой-либо прибыльный *безрисковый арбитраж* (*riskless arbitrage*).

По предположению (A.1) развитие процесса краткосрочной ставки на интервале (t, T), $t \le T$, при фиксированном априорном его значении в момент времени t зависит только от текущего значения $r(t)$. Тогда предположение (A.2) влечет то, что цена $P(t, T)$ является также и функцией $r(t)$:

$$P(t,T) = P(t,T,r(t))\ . \tag{2.6}$$

Таким образом, значение краткосрочной процентной ставки является единственной переменной состояния для всей временной структуры. Ожидания, образованные знанием всего прошлого развития ставок всех сроков погашения, включая настоящую временную структуру, эквивалентны условным ожиданиям при фиксированном настоящем значении краткосрочной ставки.

УРАВНЕНИЕ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Из уравнений (2.5), (2.6) по правилу дифференцирования Ито (см. математическое дополнение) следует, что цена облигации удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$dP = P\,\mu_P\,(t, T)\,dt - P\,\sigma_P\,(t, T)\,dW(t), \qquad (2.7)$$

где параметры $\mu_P(t, T) = \mu_P(t, T, r(t))$, $\sigma_P(t, T) = \sigma_P(t, T, r(t))$ задаются формулами

$$\mu_P(t,T,r) = \frac{1}{P(t,T,r)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r{}^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]P(t,T,r), \quad (2.8)$$

$$\sigma_P(t,T,r) = -\frac{1}{P(t,T,r)}\sigma_r \frac{\partial}{\partial r} P(t,T,r). \qquad (2.9)$$

Функции $\mu_P(t, T, r)$, $\sigma_P(t, T, r)$ соответственно являются дрейфом и волатильностью мгновенной ставки доходности в момент времени t на облигацию с датой погашения T при условии, что текущая краткосрочная ставка равна $r(t) = r$.

Теперь рассмотрим инвестора, который в момент времени t выпускает в продажу облигацию на сумму V_1 с датой погашения T_1 и одновременно покупает облигацию на сумму V_2 с датой погашения T_2. Таким образом, полная стоимость сконструированного портфеля $V = V_2 - V_1$ изменяется согласно уравнению накопления

$$dV = (V_2\,\mu_P\,(t, T_2) - V_1\,\mu_P\,(t, T_1))\,dt - (V_2\,\sigma_P\,(t, T_2) - V_1\sigma_P\,(t, T_1))\,dW, \quad (2.10)$$

которое следует из уравнения (2.7).

Предположим теперь, что суммы V_1, V_2 выбираются соответственно пропорциональными $\sigma_P\,(t, T_2)$ и $\sigma_P\,(t, T_1)$:

$$V_1 = V\,\sigma_P\,(t, T_2) \,/\, (\sigma_P\,(t, T_1) - \sigma_P\,(t, T_2)),$$
$$V_2 = V\,\sigma_P\,(t, T_1) \,/\, (\sigma_P\,(t, T_1) - \sigma_P\,(t, T_2)).$$

Тогда второе слагаемое в уравнении (2.10) исчезает и уравнение приобретает вид

$$dV = V\,(\,\mu_P(t, T_2)\sigma_P(t, T_1) \;-\mu_P(t, T_1)\sigma_P\,(t, T_2))(\sigma_P\,(t, T_1) - \sigma_P(t, T_2))^{-1}\,dt. \; (2.11)$$

Это означает, что стохастической составляющей dW в уравнении уже нет (т. е. уравнение становится детерминированным) и портфель, составленный из таких сумм двух облигаций, становится безрисковым. Поэтому он будет реализовывать доход, равный процентам, накапливаемым согласно соотношению (2.4). В противном случае портфель можно было бы купить и на полученную выручку выполнить безрисковый арбитраж.

Так как такие арбитражные возможности исключаются предположением (A.3), сравнение равенств (2.4) и (2.11) дает:

$$(\mu_P(t, T_2)\sigma_P(t, T_1) - \mu_P(t, T_1)\sigma_P(t, T_2))(\sigma_P(t, T_1) - \sigma_P(t, T_2))^{-1} = r(t),$$

или

$$\frac{\mu_P(t,T_1)-r(t)}{\sigma_P(t,T_1)} = \frac{\mu_P(t,T_2)-r(t)}{\sigma_P(t,T_2)}\ . \tag{2.12}$$

Так как равенство (2.12) имеет место для произвольных дат погашения T_1 и T_2, отсюда следует, что отношение $(\mu_P(t, T) - r(t))/\sigma_P(t, T)$ не зависит от T. Пусть значение этого отношения для облигации с любой датой погашения обозначено через $\lambda(t, r)$ при условии, что текущее значение краткосрочной ставки равно $r(t) = r$:

$$\lambda(t,r) = \frac{\mu_P(t,T,r)-r}{\sigma_P(t,T,r)}, \qquad t \le T. \tag{2.13}$$

Величина $\lambda(t, r)$ может быть названа *рыночной ценой риска* (*market price of risk*), так как она определяет увеличение ожидаемой мгновенной ставки доходности облигации на дополнительную единицу риска.

Используем теперь равенство (2.13), чтобы получить уравнение для цены дисконтированной облигации. Записав (2.13) как

$$\mu_P(t, T, r) - r = \lambda(t, r)\sigma_P(t, T, r)$$

и подставив выражения для μ_P и σ_P из равенств (2.8) и (2.9), получим после некоторого преобразования следующее уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r + \sigma_r\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^{\ 2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad t \le T. \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) является основным уравнением для оценивания дисконтированных облигаций на рынке, который характеризуется предположениями (A.1), (A.2), (A.3). Оно имеет много названий, одно из которых «*уравнение временной структуры*» мы будем использовать здесь.

Уравнение временной структуры является дифференциальным уравнением в частных производных для $P(t, T, r)$. Как только характер процесса краткосрочной ставки $r(t)$ описан и рыночная цена риска $\lambda(t,r)$ задана, цены облигации получаются решением уравнения (2.14) при граничном условии

$$P(T, T, r) = 1. \tag{2.15}$$

Временная структура $y(t, T)$ процентных ставок тогда сразу определяется равенством

$$y(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T,r(t)), \qquad T > t\,. \tag{2.16}$$

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦЕНЫ ОБЛИГАЦИИ

Решение дифференциальных уравнений в частных производных параболического и эллиптического типа, таких как уравнение (2.14), может быть представлено в интегральной форме через лежащий в основе стохастический процесс (см. математическое дополнение). Такое представление для цены облигации, как решения уравнения временной структуры (2.14) при его граничном условии, имеет вид

$$P(t,T) = E_t \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(\tau,r(\tau))d\tau + \int_t^T \lambda(\tau,r(\tau))dW(t)\right), \quad t \le T. \tag{2.17}$$

Для доказательства формулы (2.17) определим

$$V(u) = \exp\left(-\int_t^u r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^u \lambda^2(\tau,r(\tau))d\tau + \int_t^u \lambda(\tau,r(\tau))dW(t)\right)$$

и применим правило дифференцирования Ито к процессу $P(u, s)V(u)$. Тогда

$$d(PV) = VdP + PdV + dPdV =$$

$$= V\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r{}^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\right)du + V\frac{\partial P}{\partial r}\sigma_r dW + PV\left(-r - \frac{1}{2}\lambda^2\right)du +$$

$$+ PV\lambda dW + \frac{1}{2}PV\lambda^2 du + V\frac{\partial P}{\partial r}\sigma_r\lambda du =$$

$$= V\left(\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r + \sigma_r\lambda)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r{}^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP\right)du + PV\lambda dW + V\frac{\partial P}{\partial r}\sigma_r dW =$$

$$= PV\lambda dW + V\frac{\partial P}{\partial r}\sigma_r dW$$

с учетом уравнения (2.14). Интегрирование от t до T и вычисление математического ожидания дает

$$E_t\,[P(T,\,T)V(T) - P(t,\,T)V(t)] = 0,$$

откуда и следует равенство (2.17).

В частном случае, когда ожидаемые мгновенные ставки доходности на облигации для всех сроков погашения являются одинаковыми,

$$\mu_P(t,\,T) = r(t), \quad t \le s,$$

(это соответствует тому, что $\lambda = 0$), цена облигации дается выражением

$$P(t,T) = E_t \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau\right).$$

Выражению (2.17) может быть дана интерпретация в экономических терминах. Составим портфель из долгосрочной облигации (облигации, чей срок погашения является практически неограниченным) и ссуды или займа при краткосрочной ставке соответственно в пропорциях $q(t)$ и $1 - q(t)$, где

$$q(t) = (\mu_P(t,\,\infty) - r\,(t))\,/\,\sigma_P^2(t,\,\infty).$$

Цена $Q(t)$ такого портфеля определяется уравнением

$$dQ = qQ(\mu_P(t,\,\infty)\,dt - \sigma_P(t,\,\infty)\,dW) + (1-q)\,Qr\,dt.$$

Это уравнение можно проинтегрировать оценивая дифференциал от $\ln Q$ и замечая, что $q(t)\sigma_P(t,\,\infty) = \lambda(t,r(t))$. Это дает

$$d(\ln Q) = q\mu_P(t,\,\infty)\,dt - q\sigma_P(t,\,\infty)\,dW + (1-q)\,r\,dt - 0{,}5q^2\sigma_P^{\;2}(t,\,\infty)\,dt =$$

$$= r\,dt + 0{,}5\,\lambda^2 dt - \lambda dW,$$

и, следовательно,

$$\frac{Q(t)}{Q(T)} = \exp\left(-\int_t^T r(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_t^T \lambda^2(\tau,r(\tau))d\tau + \int_t^T \lambda(\tau,r(\tau))dW(t)\right).$$

Таким образом, выражение (2.17) можно записать в виде

$$P(t,T) = E_t\left(Q(t)\big/Q(T)\right), \qquad t \le T. \tag{2.18}$$

Это означает, что цена облигации любого срока погашения определяется так, чтобы одна и та же пропорция некоторой определенной комбинации долгосрочной облигации и безрискового актива (т. е. портфель Q) в настоящее время могла бы быть куплена за стоимость облигации, которая, как ожидается, будет куплена в дату погашения за стоимость погашения.

Эквивалентно уравнение (2.18) устанавливает, что цена любой облигации, измеренная в единицах стоимости такого портфеля Q, следует мартингалу

$$\frac{P(t,T)}{Q(t)} = E_t\left(\frac{P(\tau,T)}{Q(\tau)}\right), \qquad t \le \tau \le T.$$

Таким образом, если настоящая цена облигации является определенной долей стоимости портфеля Q, то ожидается, что будущая стоимость облигации останется той же самой долей стоимости этого портфеля.

При эмпирической проверке модели, так же как и для применения результатов на практике, необходимо знать параметры μ_r, σ_r процесса краткосрочной ставки и рыночную цену риска λ. Две вышеупомянутые величины могут быть получены путем статистического анализа (наблюдаемого) процесса $r(t)$. Хотя рыночная цена риска может быть найдена из определяющего ее равенства (2.13), желательно иметь более прямые средства наблюдения λ эмпирически. Может быть использовано следующее равенство:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}\left(\mu_r\left(t,r(t)\right) + \sigma_r\left(t,r(t)\right) \times \lambda\left(t,r(t)\right)\right). \tag{2.19}$$

Как только параметры μ_r и σ_r становятся известными, λ могла бы быть тогда определена по наклону кривой доходности при $\tau = 0$. Равенство (2.19) может быть доказано путем взятия второй производной выражения (2.17) по T (по правилу дифференцирования Ито) и подстановки $T = t$. Это дает

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right|_{T=t} = r^2(t) - \mu_r\left(t,r(t)\right) - \sigma_r\left(t,r(t)\right) \times \lambda\left(t,r(t)\right), \tag{2.20}$$

и из (2.1)

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right|_{T=t} = r^2(t) - 2\left.\frac{\partial y}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}. \qquad (2.21)$$

Из сравнения (2.20) и (2.21) следует равенство (2.19).

ПРОЦЕСС ОРНШТЕЙНА – УЛЕНБЕКА КАК МОДЕЛЬ КРАТКОСРОЧНОЙ СТАВКИ

Пример 1. Чтобы проиллюстрировать общую модель временной структуры процентной ставки, получим теперь ее в явной форме в ситуации, характеризуемой следующими предположениями. Во-первых, считаем, что рыночная цена риска $\lambda(t, r)$ является константой, $\lambda(t, r) = \lambda$, не зависимой от текущего времени и величины краткосрочной ставки. Во-вторых, краткосрочная ставка $r(t)$ следует так называемому процессу Орнштейна – Уленбека:

$$dr = \alpha(\gamma - r)\, dt + \rho\, dW, \qquad (2.22)$$

где $\alpha > 0$. Это соответствует выбору $\mu_r(t,r) = \alpha(\gamma - r)$, $\sigma_r(t,r) = \rho$ в уравнении (2.5). Такое описание процесса спот ставки было предложено Мертоном (1971).

Процесс Орнштейна – Уленбека с $\alpha > 0$ иногда называется эластичным случайным блужданием. Он является марковским процессом с нормально распределенными приращениями. В отличие от случайного блуждания (винеровский процесс), которое является неустойчивым процессом и дисперсия которого с увеличением времени неограниченно увеличивается, процесс Орнштейна – Уленбека имеет стационарное распределени. Мгновенный дрейф $\alpha(\gamma - r)$ представляет собой силу, которая притягивает процесс к установившемуся среднему γ с величиной, пропорциональной отклонению процесса от среднего. Стохастическая составляющая, которая имеет постоянную мгновенную дисперсию ρ^2, вынуждает процесс флуктуировать около уровня γ неупорядоченным, но непрерывным образом. Условное ожидание и дисперсия процесса при фиксированном текущем значении $r(t)$ соответственно равны

$$E_t r(T) = \gamma + (r(t) - \gamma)\exp\{-\alpha(T - t)\}, \qquad t \le T, \qquad (2.23)$$

$$\mathrm{Var}_t r(T) = (\rho^2/2\alpha)(1 - \exp\{-2\alpha(T - t)\}), \quad t \le T. \qquad (2.24)$$

Этот пример не предполагает, что процесс, задаваемый уравнением (2.22), представляет собой наилучшее описание поведения реальной краткосрочной ставки. Но когда эмпирические результаты о характере процесса спот ставки отсутствуют, такой пример является полезным.

При таких предположениях решение уравнения временной структуры (2.14), удовлетворяющее (2.15), или, другими словами, представление (2.17), имеет вид

$$P(t,T,r) = \exp\left[\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)\left(y(\infty)-r\right)-(T-t)y(\infty)-\frac{\rho^2}{4\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)^2\right], \quad (2.25)$$

где $t \le T$ и

$$y(\infty) = \gamma + \frac{\rho\lambda}{\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\alpha^2}. \quad (2.26)$$

Среднее $\mu_P(t, T)$ и стандартное отклонение $\sigma_P(t, T)$ мгновенной доходности облигации, погашаемой в дату T, равны (из уравнений (2.8) и (2.9)):

$$\mu_P(t,T) = r(t) + \frac{\rho\lambda}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right),$$

$$\sigma_P(t,T) = \frac{\rho}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right), \qquad t \le T.$$

Оказывается, чем дольше срок облигации, тем больше дисперсия мгновенной ставки доходности, а ожидаемая доходность превышает краткосрочную ставку на величину, пропорциональную стандартному отклонению. Для очень долгосрочных облигаций (т. е. при $T \to \infty$) среднее значение и стандартное отклонение стремятся к пределам

$$\mu_P(t,\infty) = \mu_P(\infty) = r(t) + \frac{\rho\lambda}{\alpha},$$

$$\sigma_P(\infty) = \frac{\rho}{\alpha}.$$

Тогда временная структура процентных ставок вычисляется при помощи выражений (2.16) и (2.25). Она принимает вид

$$y(t,T) = y(\infty) + \left(r(t) - y(\infty)\right)\frac{1}{\alpha\tau}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right) + \frac{\rho^2}{4\alpha^3\tau}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right)^2, \qquad \tau = T - t \ge 0. \quad (2.27)$$

Заметим, что доходность на очень долгосрочную облигацию, когда $T \to \infty$, равна $y(\infty)$, что делает понятным обозначение (2.26).

Кривые доходности, задаваемые формулой (2.27), начинаются при текущем уровне $r(t)$ краткосрочной ставки для $T = t$ и достигают общей асимптоты $y(\infty)$ при $T \to \infty$. Для значений $r(t)$, меньших или равных $y(\infty) - \dfrac{\rho^2}{4\alpha^2}$, кривая доходности монотонно увеличивается. Для значений $r(t)$, больших, чем эта величина, но меньших, чем $y(\infty)+\dfrac{\rho^2}{4\alpha^2}$, кривая имеет экстремум. Когда $r(t)$ равно $y(\infty)+\dfrac{\rho^2}{4\alpha^2}$ или больше этой величины, кривая доходности монотонно уменьшается.

Выражение (2.27) вместе с уравнением процесса краткосрочной ставки (2.22) полностью характеризует поведение процентной ставки при частных предположениях этого примера. Оно определяет как взаимоотношение ставок различных сроков погашения в заданный момент времени t, так и поведение процентных ставок и цен облигаций во времени. Взаимоотношение между ставками $y(t, T_1)$, $y(t, T_2)$ для двух произвольных сроков погашения может быть определено путем исключения $r(t)$ из равенства (2.27), записанного для $T = T_1$ и $T = T_2$. Кроме того, (2.27) описывает поведение ставки $y(t, T)$ для заданного срока погашения во времени. Поскольку $r(t)$ нормально распределено в силу свойств процесса Орнштейна-Уленбека и $y(t, T)$ является линейной функцией $r(t)$, отсюда следует, что $y(t, T)$ распределено также нормально. Среднее и дисперсия $y(\tau, T)$ при заданном $y(t, T)$, $t \le \tau$, получаются из выражения (2.27) путем использования формул (2.23) и (2.24). Вычисления являются элементарными и здесь не приводятся. Заметим только, что уравнение (2.22) влечет следующее: дискретный ряд ставок

$$y_n = y(nT,T)\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

образует нормальный линейный процесс авторегрессии первого порядка вида

$$y_n = c + a(y_{n-1} - c) + \varepsilon_n \tag{2.28}$$

с независимыми возмущениями ε_n . Процесс (2.28) является дискретным эластичным случайным блужданием, флуктуирующим около своего среднего c. Параметры c, a и $s^2 = E\varepsilon_n^2$ могут быть определены через γ, α, ρ и λ. В частности, константа a характеризующая степень, в которой следующий член в последовательности $\{y_n\}$ является коррелированным с текущим значением, дается равенством $a = \exp(-\alpha T)$.

Выражение (2.27) может быть также использовано для установления поведения цен облигаций. Цена $P(t,T)$, $t \le T$, распределена логарифмически нормально с параметрами распределения, вычисляемыми с использованием выражений (2.1), (2.23), (2.24) и (2.27).

Разность между форвардными ставками и ожидаемыми краткосрочными ставками, рассматриваемая как функция срока, обычно называется *премией ликвидности* (*liquidity premium*) **(**хотя некоторые авторы считают, что более подходящим названием было бы *премия срока* (*term premium*)**)**. Используя выражения (2.3) и (2.23), премию ликвидности, вытекающую из временной структуры (2.27), можно получить в виде

$$\pi(\tau) = F(t,T) - E_t r(T) = \left(y(\infty) - \gamma + \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\alpha^2} e^{-\alpha\tau} \right)\left(1 - e^{-\alpha\tau}\right), \qquad \tau = T - t \geq 0. \quad (2.29)$$

Премия ликвидности (2.29) является гладкой функцией τ. Она похожа по форме на кривые, используемые некоторыми авторами при аппроксимации наблюдаемых оценок премий ликвидности. Ее значениями для $\tau = 0$ и $\tau = \infty$ являются соответственно $\pi(0) = 0$ и $\pi(\infty) = y(\infty) - \gamma$. Последнее оказывается разностью между доходностью на очень долгосрочную облигацию и установившимся средним значением краткосрочной ставки. Если $\lambda \geq \rho/\alpha$, $\pi(\tau)$ является монотонно увеличивающейся функцией срока τ. Для $0 < \lambda < \rho/\alpha$ кривая $\pi(\tau)$ имеет максимум $\lambda^2/2$, встречающийся при

$$\tau = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{\rho/\alpha}{\rho/\alpha - \lambda}\right) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{1 - \left(\lambda\alpha/\rho\right)}\right).$$

Если рыночная цена риска $\lambda \leq 0$, тогда $\pi(\tau)$ является монотонно уменьшающейся функцией.

2.2. ОДНОФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ КРАТКОСРОЧНЫХ СТАВОК

УСЛОВИЕ ОТСУТСТВИЯ АРБИТРАЖА

Арбитражем называют возможность получения безрисковой прибыли. Чтобы описать это конкретно, рассмотрим две инвестиционные возможности A и B с текущими ценами, обозначаемыми A_t и B_t. Предположим, что инвесторы не получают никаких выплат в течение инвестиционного срока до времени истечения T, т. е. в интервале (t,T), и пусть A_T и B_T обозначают рыночные стоимости A и B в момент времени T. Эти значения являются неизвестными в момент t, но предположим, что можно считать достоверным, что при любых обстоятельствах B_T будет превышать A_T. Если цена B_t меньше, чем A_t, арбитраж мог бы быть реализован следующим образом: инвестор мог бы продать A в момент t, получив A_t, одновременно принимая обязательство заплатить A_T в момент T; так как B_t меньше, чем A_t, инвестор может купить B, заплатив B_t из полученных им A_t за продажу A, и иметь положительное сальдо $A_t - B_t$. Это является арбитражем, поскольку инвестор имеет реальную прибыль $A_t - B_t > 0$ в момент времени t и достоверное превышение доходов над расходами $B_T > A_T$ в будущий момент времени T. Таким образом, для рынка, в котором отсутствует арбитраж, мы должны предположить, что два актива с идентичными потоками платежей в будущем должны иметь одинаковую текущую цену на рынке. Такое предположение называется *законом одной цены*.

Приведем пример определения цены, исключающего арбитраж. Рассмотрим рынок ценных бумаг со следующими ценными бумагами. Ценная бумага A обеспечивает выплату $8 через год от настоящего времени, рыночная цена равна $7,54. По ценной бумаге B выплачивается $8 через два года от настоящего времени, ее рыночная цена равна $6,98. Ценная бумага C предусматривает выплату $108 через три года от настоящего времени, рыночная цена равна $85,73. Таким образом, рыночная цена портфеля, состоящего из этих трех ценных бумаг, равна $7,54 + 6,98 + 85,73 = $100,25. В настоящее время на рынке вводится новая ценная бумага D, которая подразумевает три платежа: $8 через один год, $8 через два года и $108 через три года от настоящего времени. Какой должна быть стоимость ценной бумаги D на равновесном рынке? Она будет равна $100,25.

Идея, выраженная в этом примере, заключается в том, что на равновесном рынке две ценные бумаги (или портфеля), которые обеспечивают одинаковые платежи, должны иметь одинаковую цену. Интуитивно ясно, что такое определение цены исключает арбитраж.

В этом разделе мы рассмотрим сначала торговлю двумя свободными от неуплаты дисконтированными облигациями с различными сроками погашения. Для исключения арбитражных возможностей портфель, состоящий из этих двух облигаций, в каждый момент времени должен зарабатывать тот же самый доход, что и безрисковый актив. Затем нам предстоит получить общее условие отсутствия арбитража при определении цен облигаций, которое требует, чтобы превышение ожидаемой доходности облигации над краткосрочной процентной ставкой, деленное на волатильность доходности облигации, не зависело от даты погашения облигации.

Чтобы продемонстрировать это математически для каждого $T \geq 0$, мы предположим, что цена $\{P(t, T), t \leq T\}$ свободной от неуплаты дисконтируемой облигации, погашаемой в момент T, является процессом Ито:

$$dP(t, T) = \mu^T(P(t, T), t) + \sigma^T(P(t, T), t)\, dW(t)$$

(индекс T подчеркивает зависимость дрейфа и волатильности от даты погашения облигации T). Разделим это равенство на цену облигации $P(t, T)$:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \frac{\mu^T\left(P(t,T),t\right)}{P(t,T)}dt + \frac{\sigma^T\left(P(t,T),t\right)}{P(t,T)}dW(t).$$

В полученном равенстве левая часть равна мгновенной ставке доходности облигации. Для простоты мы используем символы $\mu^T(t)$ и $\sigma^T(t)$ для обозначения соответственно $\dfrac{\mu^T\left(P(t,T),t\right)}{P(t,T)}$ и $-\dfrac{\sigma^T\left(P(t,T),t\right)}{P(t,T)}$ и получим

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \mu^T(t)dt + \sigma^T(t)dW(t), \tag{2.30}$$

т. е. $\mu^T(t)$ и $\sigma^T(t)$ являются соответственно дрейфом и волатильностью мгновенной ставки доходности облигации.

Теперь рассмотрим портфель, состоящий из количества $\dfrac{\sigma^S(t)}{P(t,T)}$ свободных от неуплаты дисконтируемых облигаций с датой погашения T и количества $-\dfrac{\sigma^T(t)}{P(t,S)}$ облигаций с датой погашения S. Тогда стоимость этого портфеля, обозначаемая через V, будет равна

$$V = \left(\frac{\sigma^S(t)}{P(t,T)}\right)P(t,T) - \left(\frac{\sigma^T(t)}{P(t,S)}\right)P(t,S) = \sigma^S(t) - \sigma^T(t), \tag{2.31}$$

и инфинитезимальное приращение стоимости портфеля равно

$$\begin{aligned} dV &= \left(\frac{\sigma^S(t)}{P(t,T)}\right)dP(t,T) - \left(\frac{\sigma^T(t)}{P(t,S)}\right)dP(t,S) = \\ &= \sigma^S(t)\left(\frac{dP(t,T)}{P(t,T)}\right) - \sigma^T(t)\left(\frac{dP(t,S)}{P(t,S)}\right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения dP/P для $T = T$ и $T = S$, получаемые из уравнения (2.30), мы увидим, что стохастические слагаемые будут взаимно уничтожаться, что приведет к уравнению для приращений стоимости портфеля в детерминированной форме:

$$dV = \sigma^S(t)\,(\mu^T(t)dt - \sigma^T(t)dW(t)) - \sigma^T(t)\,(\mu^S(t)dt - \sigma^S(t)dW(t)) =$$

$$= [\sigma^S(t)\,\mu^T(t)dt - \sigma^T(t)\,\mu^S(t)dt]\,dt\,. \tag{2.32}$$

При отсутствии арбитража безрисковый портфель должен зарабатывать проценты согласно краткосрочной ставке $r = r(t)$:

$$dV = r(t)\, V\, dt.$$

Из соотношений (2.31) и (2.32) следует, что

$$\sigma^S(t)\, \mu^T(t)dt - \sigma^T(t)\, \mu^S(t) = r(t)\, [\sigma^S(t) - \sigma^T(t)],$$

или

$$\frac{\mu^T(t) - r(t)}{\sigma^T(t)} = \frac{\mu^S(t) - r(t)}{\sigma^S(t)},$$

и поскольку левая часть равенства является независимой от S, а правая часть – независимой от T, оба эти выражения должны быть функцией, не зависящей ни от T ни от S. Мы обозначим эту функцию через $\lambda(r, t)$ и получим

$$\frac{\mu^T(t) - r(t)}{\sigma^T(t)} = \lambda(r(t), t) \qquad \text{для } t \le T.$$

$\lambda(r, t)$ называется *рыночной ценой риска* (*market price of risk*), или *премией за рыночный риск* (*market risk premium*). Это означает, что при отсутствии арбитражных возможностей существует функция $\lambda(r, t)$, такая, что

$$\mu^T(t) = r(t) + \lambda(r(t),t)\, \sigma^T(t). \tag{2.33}$$

Это равенство называется (*локальным*) *условием отсутствия арбитража*.

Подставляя (2.33) в (2.30), мы получим уравнение для цен облигаций на рынке, свободном от арбитража, или безарбитражную характеризацию временной структуры в терминах цен облигаций:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = [r(t) + \lambda(r(t),t)\, \sigma^T(t)]dt - \sigma^T(t)\, dW(t), \tag{2.34}$$

которая показывает, как условие отсутствия арбитража ограничивает вид дрейфа $\mu^T(t)$, когда процесс цены облигации подчиняется уравнению (2.30). Заметим, что вышеприведенные аргументы не используют свойство облигации при погашении (т. е. $P(T, T) = 1$). Таким образом, равенства (2.33) и (2.34) выполняются для любой ценной бумаги или портфеля, цены которых подчиняются уравнению (2.30).

Теперь рассмотрим общий случай, когда на рынке торгуют ценными бумагами с n датами погашения T_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть инвестор имеет некоторую сумму $S(t)$, которую он может потратить на покупку ценных бумаг на этом рынке, и тратит сумму $S_j = N_j\, P(t,T_j)$ на покупку N_j ценных бумаг с датой погашения T_j, поэтому

$$S(t)=\sum_{j=1}^{n} S_j=\sum_{j=1}^{n} N_j P\left(t,T_j\right).$$

Приращение стоимости портфеля этих ценных бумаг за инфинитезимальный интервал времени определяется равенством

$$dS(t)=\sum_{j=1}^{n} N_j dP\left(t,T_j\right)=\sum_{j=1}^{n} S_j \frac{dP\left(t,T_j\right)}{P\left(t,T_j\right)},$$

что с учетом уравнения (2.30) приводит к соотношению

$$dS(t)=\sum_{j=1}^{n} S_j\left(\mu^{(j)}(t)dt-\sigma^{(j)}(t)dW(t)\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} S_j\mu^{(j)}(t)dt-\left(\sum_{j=1}^{n} S_j\sigma^{(j)}(t)\right)dW(t),$$

где $\mu^{(j)}(t)$ и $\sigma^{(j)}(t)$ являются дрейфом и волатильностью доходности ценной бумаги с датой погашения T_j, $j = 1, \ldots, n$. Для получения безрискового дохода необходимо, чтобы сумма в скобках в стохастическом слагаемом была равна нулю, т. е. для получения безрисковой прибыли нужно таким образом распределять имеющуюся сумму $S(t)$, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^{n} S_j\sigma^{(j)}(t)=0.$$

Не нарушая общности, предположим, что $\sigma^{(n)}(t)\neq 0$, поэтому

$$S_n=-\frac{1}{\sigma^{(n)}(t)}\sum_{j=1}^{n-1} S_j\sigma^{(j)}(t).$$

Такой выбор S_n обеспечивает безрисковое получение прибыли, равное

$$dS(t)=\sum_{j=1}^{n-1} S_j\mu^{(j)}(t)dt-\frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)}\sum_{j=1}^{n-1} S_j\sigma^{(j)}(t)=$$

$$=\left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j\left(\mu^{(j)}(t)-\frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)}\sigma^{(j)}(t)\right)\right]dt.$$

На рынке будут отсутствовать условия арбитража только тогда, когда, каким бы ни выбирал инвестор распределение $\{S_j\}$ своих денег по типам приобретаемых ценных бумаг для получения безрисковой прибыли, приращение суммы $S(t)$ будет в точности равным приращению безрискового актива такой же стоимости, то есть должно выполняться равенство

$$dS(t) = S(t)\, r(t)\, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} S_j r(t)dt = \sum_{j=1}^{n-1} S_j r(t)dt - \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sum_{j=1}^{n-1} S_j \sigma^{(j)}(t)dt =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(r(t) - \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t)\right)\right] dt.$$

Приравнивая полученные формулы для безрискового приращения стоимости $S(t)$, приходим к равенству

$$\left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(\mu^{(j)}(t) - \frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t)\right)\right] dt = \left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(r(t) - \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t)\right)\right] dt.$$

Откуда

$$\left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \left(\mu^{(j)}(t) - \frac{\mu^{(n)}(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t) - r(t) + \frac{r(t)}{\sigma^{(n)}(t)} \sigma^{(j)}(t)\right)\right] dt =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n-1} S_j \sigma^{(j)}(t) \left(\frac{\mu^{(j)}(t) - r(t)}{\sigma^{(j)}(t)} - \frac{\mu^{(n)}(t) - r(t)}{\sigma^{(n)}(t)}\right)\right] dt = 0.$$

Поскольку это равенство должно выполняться для любого распределения $\{S_j,\ 1 \le j \le n\}$ имеющейся суммы $S\{t\}$ по типам ценных бумаг, мы приходим к следующему условию отсутствия безрискового арбитража:

$$\frac{\mu^{(j)}(t) - r(t)}{\sigma^{(j)}(t)} = \frac{\mu^{(n)}(t) - r(t)}{\sigma^{(n)}(t)}, \qquad 1 \le j \le n-1.$$

Таким образом, отношение превышения средней доходности $\mu^{(j)}(t)$ ценной бумаги с датой погашения T_j над краткосрочной процентной ставкой

$r(t)$ к волатильности $\sigma^{(j)}(t)$ процесса изменения доходности этой ценной бумаги при отсутствии безрискового арбитража не должно зависеть от даты погашения и должно быть одинаковым для всех дат погашения. Оно и называется рыночной ценой риска $\lambda(r(t),t)$.

Заметим, что в детерминированном случае, когда $\sigma^T(t) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$, мы имеем из уравнения (2.34)

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)\,dt \quad \text{или} \quad \frac{\partial P}{\partial t} - r(t)P(t,T) = 0$$

что совпадает с уравнением (1.5).

Для случая $\lambda(r,t) \equiv 0$ мы получаем из уравнения (2.34)

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)\,dt - \sigma^T(t)\,dW(t).$$

Обозначив $\tilde{P}(t,T) = P(t,T)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]$, получим

$$d\tilde{P}(t,T) = dP(t,T)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right] - P(t,T)d\left\{\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]\right\} =$$

$$= -\sigma^T(t)P(t,T)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]dW(t) = -\sigma^T(t)\tilde{P}(t,T)dW(t).$$

Поскольку цена $\tilde{P}(t,T)$ является процессом Ито с нулевым дрейфом, она является мартингалом и, следовательно,

$$E_t\left[\tilde{P}(T,T)\right] = \tilde{P}(t,T)\ .$$

Замечая, что $\tilde{P}(t,T) = P(t,T)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right]$, а $P(T,T) = 1$, мы получаем

$$\tilde{P}(T,T) = \exp\left[-\int_0^T r(s)ds\right]$$

и

$$E_t\left\{\exp\left[-\int_0^T r(s)ds\right]\right\} = P(t,T)\exp\left[-\int_0^t r(s)ds\right].$$

Таким образом,

$$P(t,T)=E_t\left\{\exp\left[-\int_t^T r(s)ds\right]\right\}. \qquad (2.35)$$

Для случая, когда $\lambda(r,\, t) \neq 0$, наряду с краткосрочной процентной ставкой $r(t)$ рассмотрим процентную ставку $\tilde{r}(t) = \mu^T(t) + \lambda(r,\, t)\sigma^T(t)$, которая называется *процентной ставкой, отрегулированной риском* (*risk-adjusted interest rate*), и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\,\tilde{r}(s) = (\mu^T(s) + \lambda(\tilde{r},\, s)\sigma^T(s))\, ds + \sigma^T(s)\, dW(s)\,, \quad s \geq t\,,\ \tilde{r}(t) = r(t). \qquad (2.36)$$

Тогда, согласно уравнению (2.34) для цены облигации, мы будем имеем ту же самую формулу (2.35), в которой вместо краткосрочной процентной ставки $r(s)$, $s \geq t$, используется отрегулированная риском процентная ставка $\tilde{r}(s)$ и условное математическое ожидание берется не по исходной вероятностной мере, а по модифицированной вероятностной мере Q (*risk adjusted probability measure*), согласованной с уравнением (2.36), т. е.

$$P(t,T)=E_t^Q\left\{\exp\left[-\int_t^T \tilde{r}(s)ds\right]\right\}.$$

В этом случае (2.36) обычно называется уравнением Q-динамики. Заметим, что поведение процентной ставки $\tilde{r}(s)$ для $s \geq t$ зависит от ее исходного значения $\tilde{r}(t) = r(t)$, так что значение $r(t) = r$ наряду с t тоже является параметром, определяющим цену облигации. В этом смысле цена может рассматриваться как функция трех переменных $P(t,\, r,\, T)$.

ОДНОФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ КРАТКОСРОЧНЫХ СТАВОК

В этом классе моделей временной структуры снова в качестве математической модели изменений краткосрочной ставки выбирается процесс с независимыми приращениями. Предполагая, что $P(t,\, r,\, T)$ является детерминированной функцией краткосрочной ставки $r = r(t)$ в момент t, из условия отсутствия арбитража можно, как и прежде, получить дифференциальное уравнение в частных производных для $P(t,T)$. В этих моделях предполагается, что изменения краткосрочной ставки $r(t)$ описываются процессом Ито

$$dr(t) = \mu(r(t),\, t)\, dt + \sigma(r(t),\, t)\, dW(t),$$

где $\mu(r(t), t)$ и $\sigma(r(t), t)$ являются соответственно дрейфом и волатильностью процесса $r(t)$ в момент t. Для простоты мы будем пользоваться символами $\mu_r(t)$ и $\sigma_r(t)$ вместо $\mu(r(t), t)$ и $\sigma(r(t), t)$. Тогда

$$dr(t) = \mu_r(t)\, dt + \sigma_r(t)\, dW(t)\,. \tag{2.37}$$

Примером такой модели является уже рассмотренная модель Васичека.

Поскольку краткосрочная ставка $\{r(t)\}$ представляет собой процесс с независимыми приращениями, из леммы Ито следует, что для каждого $T \geq 0$ процесс цен $\{P(t, r(t), T),\ 0 \leq t \leq T\}$ сам является процессом с независимыми приращениями и инфинитезимальное приращение $P = P(t, r(t), T)$ в момент t дается выражением

$$dP = \left\{ \frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu_r(t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} \right\} dt + \sigma_r(t)\frac{\partial P}{\partial r} dW(t).$$

Таким образом,

$$\frac{dP}{P} = \frac{\frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu_r(t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t}}{P} dt + \frac{\sigma_r(t)\frac{\partial P}{\partial r}}{P} dW(t)\,.$$

Сравнивая это с уравнением (2.30), мы получим

$$\mu^T(t) = \frac{\frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu_r(t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t}}{P}$$

и

$$\sigma^T(t) = -\frac{\sigma_r(t)\frac{\partial P}{\partial r}}{P}\,.$$

Подставив последние два выражения в условие отсутствия арбитража (2.33), получаем

$$\frac{\frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu_r(t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t}}{P} = r - \lambda(r,t)\frac{\sigma_r(t)\frac{\partial P}{\partial r}}{P}\,,$$

или

$$\frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \left[\mu_r(t) + \lambda(r,t)\sigma_r(t)\right]\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial P}{\partial t} - rP = 0. \qquad (2.38)$$

Как мы заметили выше, уравнение (2.38) справедливо для любых ценных бумаг или портфелей, чьи процессы цен подчиняются уравнению (2.30). Уравнение (2.38) полностью совпадает с уравнением временной структуры (2.14). Иногда оно называется фундаментальным дифференциальным уравнением в частных производных для определения цен активов. Оно обеспечивает общую структуру для вычисления цены дисконтируемых облигаций в моделях краткосрочной ставки.

Когда решение уравнения (2.38) может быть представлено в виде

$$P(t, r, T) = \exp\{A(t,T) - r\,B(t,T)\}, \qquad (2.39)$$

говорят, что модель обладает *аффинной временной структурой* (*affine term structure*). Для того чтобы цена актива (2.39) удовлетворяла условию погашения $P(T, r, T) = 1$, необходимо, чтобы для любого значения краткосрочной процентной ставки r имели место равенства $A(T, T) = 0$, $B(T, T) = 0$. Модели с аффинной временной структурой составляют класс *аффинной доходности* (*affine yield class*). Рассмотрим основные модели этого класса.

К классу аффинной доходности принадлежит рассмотренная в разделе 2.1 модель Васичека, в которой волатильность и дрейф процесса в уравнении краткосрочной ставки (2.37) определяются так: $\sigma_r(t)$ является константой, а $\mu_r(t) = k(\theta - r(t))$, где k и θ постоянные. Предполагается также, что рыночная цена риска не зависит от времени и величины краткосрочной процентной ставки, т. е. $\lambda(r,t) = \lambda$, где λ является постоянной. Функции $A(t,T)$ и $B(t,T)$ для этой модели имеют вид

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k}, \qquad \tau = T - t,$$

и

$$A(\tau) = \frac{\left[B(\tau) - \tau\right]\left[k(k\theta + \lambda\sigma) - \frac{\sigma^2}{2}\right]}{k^2} - \frac{\left[B(\tau)\right]^2\sigma^2}{4k}.$$

Доказательство. Из выражения (2.39), которое при постоянных коэффициентах приобретает вид $P(t, r, T) = \exp\{A(\tau) - r\,B(\tau)\}$, мы имеем

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -B(\tau)P\ ,\quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B(\tau)^2 P \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \left[r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA}{d\tau} \right] P .$$

Подстановка этих производных в уравнение (2.38) дает

$$\left\{ \frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2\left[B(\tau)\right]^2 - \left[\mu_r(t) + \lambda(r,t)\sigma_r(t)\right]B(\tau) - r + r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right\} P = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2\left[B(\tau)\right]^2 - \left[\mu_r(t) + \lambda(r,t)\sigma_r(t)\right]B(\tau) - r + r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (2.40)$$

Для модели Васичека $\mu_r(t) = k(\theta - r(t))$ и $\sigma_r(t) = \sigma$. Выбирая $\lambda(r, t) = \lambda$, получаем равенство (2.40) в виде

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left[B(\tau)\right]^2 - \left[k(\theta - r) + \lambda\sigma\right]B(\tau) - r + r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = 0,$$

или

$$\left\{ \frac{1}{2}\sigma^2\left[B(\tau)\right]^2 - \left[k\theta + \lambda\sigma\right]B(\tau) - \frac{dA(\tau)}{d\tau} \right\} + r\left[kB(\tau) + \frac{dB(\tau)}{d\tau} - 1 \right] = 0.$$

Так как это уравнение справедливо для любых r, мы имеем

$$kB(\tau) + \frac{dB(\tau)}{d\tau} - 1 = 0, \qquad B(0) = 0,$$

и

$$\frac{1}{2}\sigma^2\left[B(\tau)\right]^2 - \left[k\theta + \lambda\sigma\right]B(\tau) - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = 0, \qquad A(0) = 0.$$

Решая эти уравнения относительно A и B (о решении дифференциальных уравнений см. математическое дополнение), мы получаем

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-k\tau}}{k}$$

и

$$A(\tau) = \frac{\left[B(\tau) - \tau\right]\left[k(k\theta + \lambda\sigma) - \frac{\sigma^2}{2} \right]}{k^2} - \frac{\left[B(\tau)\right]^2 \sigma^2}{4k}.$$

Другой моделью класса аффинной доходности является модель CIR (Cox, Ingersoll & Ross, 1985), для которой $\mu_r(t) = k(\theta - r(t))$ и $\sigma_r(t) = \sigma\sqrt{r(t)}$, где k, σ и θ являются постоянными. Заметим, что при заданных таким образом параметрах уравнение краткосрочной процентной ставки (2.37) определяет случайный процесс $r(t)$ с отражающей границей $r(t) = 0$. Это значит, что если в некоторый исходный момент времени $t = 0$ процентная ставка $r(0)$ была положительной, то она остается положительной в течение всего последующего времени. Это обеспечивает с практической точки зрения адекватную ситуацию, так как реальные процентные ставки всегда являются неотрицательными. (Кстати, этого не обеспечивает модель Васичека, так как в ней с положительной вероятностью процентные ставки могут быть отрицательными.) В модели CIR рыночная цена риска устанавливается путем использования модели рыночного равновесия в общей трактовке. Рыночная цена риска $\lambda(r, t)$ задается выражением $-\frac{\lambda(t)}{\sigma}\sqrt{r(t)}$. Чтобы получить явный вид решения для модели CIR, предположим, что $\lambda(t)$ является постоянной λ, тогда

$$B(\tau) = \frac{2\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)}{2\varepsilon + (k + \lambda + \varepsilon)\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)}$$

и

$$A(\tau) = \frac{2k\theta}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2\varepsilon\, e^{(k+\lambda+\varepsilon)\tau/2}}{2\varepsilon + (k + \lambda + \varepsilon)\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)}\right],$$

где $\varepsilon = \sqrt{(k+\lambda)^2 + 2\sigma^2}$, $\tau = T - t$.

Доказательство. Для модели CIR $\mu_r(t) = k(\theta - r(t))$ и $\sigma_r(t) = \sigma\sqrt{r(t)}$. Выбирая $\lambda(r,t) = -\frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r(t)}$, мы получаем выражение (2.40) в виде

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r[B(\tau)]^2 - [k(\theta - r) - \lambda r]B(\tau) - r + r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA(\tau)}{d\tau} = 0,$$

или

$$\left\{\frac{1}{2}\sigma^2[B(\tau)]^2 + [k + \lambda]B(\tau) - 1 + \frac{dB(\tau)}{d\tau}\right\}r - \left[k\theta\, B(\tau) + \frac{dA(\tau)}{d\tau}\right] = 0.$$

Снова пользуясь тем, что это равенство справедливо для любых r, получаем следующие уравнения для A и B:

$$\frac{1}{2}\sigma^{2}\left[B(\tau)\right]^2+\left[k+\lambda\right]B(\tau)-1+\frac{dB(\tau)}{d\tau}=0, \qquad B(0)=0,$$

и

$$k\theta B(\tau)+\frac{dA(\tau)}{d\tau}=0, \qquad A(0)=0.$$

Решая эти уравнения относительно A и B (о решении дифференциальных уравнений см. математическое дополнение), мы получаем

$$B(\tau)=\frac{2\left(e^{\varepsilon\tau}-1\right)}{2\varepsilon+\left(k+\lambda+\varepsilon\right)\left(e^{\varepsilon\tau}-1\right)}$$

и

$$A(\tau)=\frac{2k\theta}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2\varepsilon\, e^{(k+\lambda+\varepsilon)\tau/2}}{2\varepsilon+\left(k+\lambda+\varepsilon\right)\left(e^{\varepsilon\tau}-1\right)}\right],$$

где $\varepsilon=\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}$.

Модель CIR и модель Васичека являются частными случаями более общей модели MC (Medvedev & Cox, 1996), для которой уравнение временной структуры (2.38) может быть записано в форме

$$\frac{1}{2}\left[\sigma_r(t)\right]^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\left[\tilde{\mu}_r(t)\right]\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial P}{\partial t}-rP=0, \qquad (2.41)$$

где отрегулированный риском дрейф $\tilde{\mu}_r=\mu_r(t)+\lambda(r,t)\sigma_r(t)$ и квадрат волатильности σ_r^2 явно не зависят от времени, что относит ее к классу моделей, однородных по времени (*time homogeneous model*), и являются линейными функциями краткосрочной процентной ставки (что обеспечивает аффинность модели), т. е.

$$\mu_r(t)=\alpha r+\beta, \quad \sigma_r^2(t)=\gamma r+\delta, \quad \lambda(r,t)\sigma_r(t)=\xi r+\eta, \qquad (2.42)$$

где α , β , γ , δ , ξ и η являются константами, которые удовлетворяют определенным ограничениям.

Перечислим вкратце эти ограничения. Для того чтобы процесс краткосрочной процентной ставки был устойчивым (т. е. с течением времени дисперсия процесса не увеличивалась неограниченно, а устанавливалась на некотором уровне), необходимо, чтобы $\alpha<0$. При этом среднее значение краткосрочной процентной ставки будет устанавливаться к уровню $-\beta/\alpha$, когда $t \to \infty$. Из соотношений (2.42) также вытекает необходимое условие $\sigma_r^2(t) = \gamma r + \delta \geq 0$. Смысл его состоит в следующем. Сделаем естественные предположения, что исходное значение краткосрочной процентной ставки $r(0)$ было таким, чтобы это условие выполнялось, $\gamma r + \delta \geq 0$, и что это неравенство выполняется строго при установившемся значении краткосрочной процентной ставки $r = -\beta/\alpha$, т.е. $\delta - \beta\gamma/\alpha > 0$. Тогда из свойств стохастического уравнения (2.37) следует, что с течением времени это условие будет удовлетворяться всегда. Физически это означает, что значение $r = -\delta/\gamma$ является отражающей границей процесса краткосрочной процентной ставки. Когда процесс $r(t)$ достигает этого уровня, мгновенная волатильность процесса $\sigma_r(t)$ обращается в нуль, уравнение (2.37) перестает быть стохастическим и начинает детерминированно изменяться в сторону своего уровня установления, т. е. удаляется от этой границы внутрь области, где выполняется условие $\gamma r + \delta > 0$.

Модель MC превращается в модель Васичека, когда

$$
\begin{aligned}
&\mu_r(t) = \alpha r + \beta = k(\theta - r), && \text{т. е.} \quad \alpha = -k,\ \beta = k\theta.\\
&\sigma_r^2(t) = \gamma r + \delta = \sigma^2, && \text{т. е.} \quad \gamma = 0,\ \delta = \sigma^2.\\
&\lambda(r,t)\sigma_r(t) = \xi r + \eta = \lambda\sigma, && \text{т. е.} \quad \xi = 0,\ \eta = \lambda\sigma.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в модели Васичека отражающая граница процесса краткосрочной процентной ставки удаляется к $-\infty$.

Модель MC превращается в CIR модель, когда

$$
\begin{aligned}
&\mu_r(t) = \alpha r + \beta = k(\theta - r), && \text{т. е.} \quad \alpha = -k,\ \beta = k\theta.\\
&\sigma_r^2(t) = \gamma r + \delta = \sigma^2 r, && \text{т. е.} \quad \gamma = \sigma^2,\ \delta = 0.\\
&\lambda(r,t)\sigma_r(t) = \xi r + \eta = -\lambda r, && \text{т. е.} \quad \xi = -\lambda,\ \eta = 0.
\end{aligned}
$$

В модели CIR отражающей границей процесса краткосрочной процентной ставки является $r = -\delta/\gamma = 0$.

Для модели MC функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ имеют вид

$$
B(\tau) = \frac{2\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)}{2\varepsilon + \vartheta\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)}, \quad \varepsilon = \sqrt{(\alpha + \xi)^2 + 2\gamma}
$$

и (2.43)

$$
A(\tau) = \frac{\delta}{\gamma}\left(\tau - B(\tau)\right) - \frac{\omega}{\gamma^2}\left[(\alpha + \xi)\tau + \ln\left(\frac{dB(\tau)}{d\tau}\right)\right].
$$

где для компактности использованы обозначения $\omega = \delta(\alpha + \xi) - \gamma(\beta + \eta)$, $\vartheta = \varepsilon - (\alpha + \xi)$.

Доказательство. Для модели МС уравнение (2.40) приобретает вид

$$\frac{1}{2}(\gamma\ r+\delta)[B(\tau)]^2-[(\alpha+\xi)r+\beta+\eta]B(\tau)-r+r\frac{dB(\tau)}{d\tau}-\frac{dA(\tau)}{d\tau}=0.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$\frac{dB}{d\tau}=(\alpha+\xi)B(\tau)-\frac{1}{2}\gamma\ B^2(\tau)+1,\qquad B(0)=0,$$

и

$$\frac{dA}{d\tau}=-(\beta+\eta)B(\tau)+\frac{1}{2}\delta\ B^2(\tau),\qquad A(0)=0.$$

Обращаясь к математическому дополнению в конце книги, можно решить эти уравнения и получить выражения (2.43). Однако наряду с этим мы используем несколько другой способ. Заметим, что уравнение для $B(\tau)$ можно записать в виде

$$\frac{dB(\tau)}{1-0{,}5\gamma B^2(\tau)+(\alpha+\xi)B(\tau)}=d\tau.$$

Это равенство можно проинтегрировать по интервалу $(0,\tau)$, так как в левой части стоит интеграл от рациональной функции, который берется в явной форме. Поскольку $(\alpha+\xi)^2+2\gamma=\varepsilon^2>0$, с учетом того, что $B(0)=0$, интегрирование дает

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\ln\frac{\gamma\ B(\tau)-(\alpha+\xi)+\varepsilon}{\gamma\ B(\tau)-(\alpha+\xi)-\varepsilon}-\ln\frac{(\alpha+\xi)-\varepsilon}{(\alpha+\xi)+\varepsilon}\right)=\tau.$$

Определяя отсюда $B(\tau)$, находим требуемое выражение. Для получения $A(\tau)$ заметим, что второе уравнение является просто производной от этой функции. Поэтому его достаточно проинтегрировать по интервалу $(0,\tau)$, чтобы получить выражение для $A(\tau)$, учитывая, что $A(0)=0$. Так что

$$A(\tau)=\int_0^{\tau}\left[(\beta+\eta)B(\tau)-\frac{1}{2}\delta\ B^2(\tau)\right]d\tau.$$

Этот интеграл можно переписать с учетом предыдущего интегрирования как

$$A(\tau)=\int_0^{B(\tau)}\left[\frac{(\beta+\eta)B-\frac{1}{2}\delta\ B^2}{0{,}5\gamma B^2-(\alpha+\xi)B-1}\right]dB.$$

Получившийся интеграл является снова интегралом от рациональной функции и может быть вычислен в явной форме. Вычисляя его, находим

$$A(\tau)=\frac{\delta}{\gamma}(\tau-B(\tau))-\frac{\omega}{\gamma^2}\left[(\alpha+\xi)\tau+\ln\left(\frac{dB(\tau)}{d\tau}\right)\right].$$

Под знаком логарифма здесь для краткости поставлена производная функции $B(t)$, так как она в явной форме выписывается через $B(t)$ из первого уравнения. Заметим также, что функция $B(t)$ для модели МС имеет тот же вид, что и в модели CIR.

В заключение заметим, что поскольку рассмотренные однофакторные модели процессов краткосрочной процентной ставки отличаются тем, что в них процесс краткосрочной ставки $r(t)$ имеет тенденцию изменяться около установившегося среднего значения θ, эти процессы иногда называют *процессами*, *возвращающимися к среднему* (*mean-reverting process*).

2.3 ОДНОФАКТОРНЫЕ МОДЕЛИ ФОРВАРДНЫХ СТАВОК

В предыдущих разделах мы рассмотрели несколько попыток описать поведение кривой доходности с помощью однофакторной модели. Традиционный подход состоит в построении правдоподобной модели краткосрочной процентной ставки и получении с ее помощью текущей кривой доходности и траектории, согласно которой она может развиваться в будущем. После чего параметры модели выбираются таким образом, чтобы она отражала рыночные данные насколько это возможно. Однако существуют и другие подходы. Они отталкиваются от рыночных данных, таких как текущая временная структура процентной ставки, которые считаются заданными и позволяют получать неарбитражную модель кривой доходности так, чтобы она полностью соответствовала данным. В этом разделе мы рассмотрим несколько общих процедур, которые можно использовать при реализации второго подхода. (Мы говорим, что модель является арбитражной, если при ее построении в явной форме используется условие отсутствия арбитража. Когда это условие при построении модели явно не используется, принято называть ее неарбитражной, хотя и в этом случае арбитраж также исключается.)

Хо и Ли (см. Ho & Lee, 1986) впервые предложили такую неарбитражную модель кривой доходности. Их модель HL определения цен дисконтированных облигаций, которая была разработана для дискретного времени, обеспечивает точное согласие с текущей временной структурой процентной ставки. Версия аналогичной модели для непрерывного времени является частным случаем одной из моделей, рассмотренных позже Халлом и Уайтом (Hull & White, 1993). Хит, Джарроу и Мортон (Heath, Jarrow & Morton, 1992) также использовали идею модели HL для рассмотрения процесса, определяющего форвардную процентную ставку, и получили общие результаты, которые должны иметь место для всех моделей кривой доходности, свободной от арбитража. Таким образом, сформировалось три различных подхода к построению свободных от арбитража моделей временной структуры, которые заключаются в построении модели цен дисконтированных облигаций, моделировании мгновенных форвардных ставок и моделировании краткосрочной процентной ставки. Рассмотрим сначала соотношения между этими тремя подходами.

Первый подход, уже изученный нами, подразумевает конкретизацию процесса краткосрочной процентной ставки. Второй подход, использованный Хо и Ли, а затем Халлом и Уайтом, основан на определении процесса, которому следуют цены всех дисконтированных облигаций во все моменты времени. Третий подход, предложенный Хитом, Джарроу и Мортоном в 1992 г. для разработки их HJM-модели, основан на определении процесса, которому следуют все мгновенные форвардные ставки во все будущие моменты времени. В этом разделе исследуется взаимоотношение между этими подходами. Хотя мы и предполагаем здесь, что временной структурой управляет единственный фактор, анализ может быть распространен на ситуацию, когда имеется несколько факторов.

ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ДИСКОНТИРОВАННЫХ ЦЕН ОБЛИГАЦИЙ И ФОРВАРДНЫХ СТАВОК

Мы будем использовать те же обозначения, что и ранее.

$P(t,T)$ – цена в момент t дисконтированной облигации, погашаемой в момент T.

$v(t, T)$ – волатильность процесса цены $P(t, T)$.

$f(t,T)$ – мгновенная форвардная ставка для контракта погашаемого в момент T по рыночным данным для момента времени t.

$r(t)$ – краткосрочная безрисковая процентная ставка (*short-term risk-free interest rate*) в момент t.

$f(t, T_1, T_2)$ – форвардная ставка для периода между моментами времени T_1 и T_2 по рыночным данным момента времени t, $t < T_1 < T_2$.

$dW(t)$ – винеровский процесс (броуновское движение), вызывающий изменения временной структуры.

Мы будем говорить, что интересующий нас процесс развивается в *нейтральной к риску среде* (*risk-neutral world*), если ожидаемый доход на все активы и ценные бумаги определяется только безрисковой процентной ставкой $r(t)$. Это означает, что инвесторы нейтральны к риску и не требуют какой либо премии, побуждающей их принимать на себя риск. Формально это означает, что рыночная цена риска равна нулю, $\lambda(r,t) = 0$. Математически процессы в реальном мире развиваются по тем же законам, что и в нейтральной к риску среде, если вместо безрисковой процентной ставки $r(t)$, использовать отрегулированную риском краткосрочную процентную ставку $\tilde{r}(t)$, а ожидаемые величины определять не по реальной вероятностной мере, а по отрегулированной риском мартингальной мере Q, согласованной с уравнением Q-динамики отрегулированной риском краткосрочной процентной ставки (см. уравнения (7) и (15) раздела 2.1). Однако следует заметить, что в реальном мире мы не наблюдаем $\tilde{r}(t)$, а наблюдаем $r(t)$, изменяющуюся согласно объективной вероятностной мере. Поэтому результаты, получаемые с использованием отрегулированных риском процентных ставок и математических ожиданий, необходимо затем соответствующим образом интерпретировать, поскольку в противном случае можно получить совершенно бессмысленные результаты. Применение отрегулированной риском вероятностной меры оправдывается тем, что она позволяет доказывать достаточно общие закономерности реального рынка более простыми средствами, справедливыми в нейтральной к риску среде. В частности, настоящую стоимость любого потока платежей в нейтральной к риску среде можно получить путем вычисления ожидаемого значения ее дисконтированной стоимости при безрисковой процентной ставке.

Процесс, которому следовала бы $P(t,T)$ в нейтральной к риску среде, является следующим (см. также соотношение (2.34) в разделе 2.2)

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T)P(t, T)\, dW(t) \tag{1}$$

Волатильность $v(t, T)$ в модели наиболее общего вида может быть любой функцией с хорошим поведением от прошлых и настоящего значения P. Однако, поскольку волатильность цены облигации уменьшается до нуля при погашении, $v(t, t) = 0$, это равенство эквивалентно предположению о том, что все дисконтированные облигации имеют конечный дрейф в течение всего времени. Когда волатильность не уменьшается до нуля при погашении, может потребоваться неограниченный дрейф, чтобы обеспечить цену облигации равную ее номинальной стоимости при погашении.

Форвардная ставка $f(t, T_1, T_2)$ может быть выражена через цены дисконтированной облигации следующим образом (см. выражение (7) в разделе 1.2):

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1} \; . \tag{2}$$

Из уравнения (1) по формуле Ито имеем равенства

$$d \ln P(t, T_1) = (r(t) - v(t, T_1)^2/2)dt + v(t, T_1)dW(t),$$
$$d \ln P(t, T_2) = (r(t) - v(t, T_2)^2/2)dt + v(t, T_2)dW(t).$$

Так что

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{v(t,T_2)^2 - v(t,T_1)^2}{2(T_2 - T_1)}dt + \frac{v(t,T_1) - v(t,T_2)}{T_2 - T_1}dW(t). \tag{3}$$

Уравнение (3) показывает, что нейтральный к риску процесс форвардной ставки f явно зависит только от v . Он зависит от r и P только через v.

Если ввести переобозначения $T_1 = T$ и $T_2 = T + \Delta T$ и подставить их в уравнение (3), а затем вычислить его предельное значение при $\Delta T \to 0$, $f(t, T_1, T_2)$ превращается в $f(t, T)$, коэффициент при $dW(t)$ превращается в частную производную $\dfrac{\partial v(t,T)}{\partial T}$, а коэффициент при dt становится равным $v(t,T) \dfrac{\partial v(t,T)}{\partial T}$. Отсюда следует, что

$$df(t, T) = v(t, T) \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}dt - \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}dW(t),$$

или, без потери общности, заменяя знак перед $dW(t)$, имеем

$$df(t, T) = v(t, T) \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}dt + \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}dW(t) \tag{4}$$

Как только $v(t,T)$ определяется для всех t и T, нейтральный к риску процесс для $f(t,T)$ становится известным. Поэтому знание $v(t,T)$ достаточно для полного определения однофакторной модели форвардной ставки процента.

Интегрируя $\dfrac{\partial v(t,T)}{\partial T}$ по интервалу $t \le \tau \le T$, получим

$$v(t,\ T) - v(t,\ t) = \int_t^T \frac{\partial v(\tau,T)}{\partial T} d\tau .$$

Так как $v(t,\ t) = 0$, это дает

$$v(t,\ T) = \int_t^T \frac{\partial v(\tau,T)}{\partial T} d\tau .$$

Если $m(t,T)$ и $s(t,T)$ являются мгновенным дрейфом и волатильностью процесса форвардной ставки $f(t,\ T)$, то из (4) следует, что

$$m(t,\ T) = s(t,\ T) \int_t^T s(t,\ \tau) d\tau . \qquad (5)$$

Это является ключевым результатом при построении HJM-модели, знаменитым *условием дрейфа HJM* (*Heath, Jarrow & Morton drift condition*). Использование этого условия будет проиллюстрировано на примере 3 в конце раздела.

ПРОЦЕСС ДЛЯ КРАТКОСРОЧНОЙ СТАВКИ.

В этом разделе процесс $r(t)$ выводится из цены облигации и начальной временной структуры. Так как

$$f(t,\ t) = f(0,\ t) + \int_0^t df\ (\tau,\ t)$$

и $r(t) = f(t,\ t)$, то из (4) следует, что

$$r(t) = f(0,\ t) + \int_0^t v(t,\ \tau) \frac{\partial v(\tau,t)}{\partial t} d\tau + \int_0^t \frac{\partial v(\tau,t)}{\partial t}\ dW(\tau). \qquad (6)$$

Дифференцируя по t и используя равенство $v(t,\ t) = 0$, получим

$$dr(t)=\frac{\partial f(0,t)}{\partial t}dt+\left(\int_0^t\left[v(\tau,t)\frac{\partial^2 v(\tau,t)}{\partial t^2}+\left(\frac{\partial v(\tau,t)}{\partial t}\right)^2\right]d\tau\right)dt+$$
$$+\left(\int_0^t\frac{\partial^2 v(\tau,t)}{\partial t^2}dW(\tau)\right)dt+\left(\left.\frac{\partial v(\tau,t)}{\partial t}\right|_{\tau=t}\right)dW(t). \tag{7}$$

Это уравнение характеризует нейтральный к риску процесс $r(t)$ в момент t. Процесс r согласован с нейтральным к риску процессом для цен облигации, определяемым уравнением (1). Для определения цены облигаций нужно интересоваться только нейтральным к риску процессом для r, поскольку цены могут определяться в предположении, что r следует своему нейтральному к риску процессу, при помощи использования свободной от риска процентной ставки при дисконтировании. Никаких предположений не требуется относительно рыночной цены риска.

Интересно рассмотреть слагаемые правой части уравнения (7). Первое и четвертое слагаемые понятны. Первое слагаемое показывает, что одна компонента дрейфа r является зависимой от времени и равна при $t \to 0$ начальной форвардной ставке. Четвертое слагаемое показывает, что мгновенное стандартное отклонение r равно $\frac{\partial v(\tau,t)}{\partial t}\Big|_{\tau=t}$. Второе и третье слагаемые более сложные, особенно когда v является стохастическим. Второе слагаемое зависит от истории v, поскольку оно включает $v(\tau, t)$, когда $\tau < t$. Третье слагаемое зависит как от истории v, так и от dW. Эти два слагаемых, следовательно, являются основанием того, что процесс r оказывается немарковским. Немарковские модели r в общем случае менее изучены, чем марковские модели.

Один частный случай, когда $r(t)$ является марковским процессом, задается следующей функцией $v(t, T) = (T - t)\sigma$, где σ – константа. Уравнение (7) тогда сводится к

$$dr=\left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t}+\sigma^2 t\right)dt+\sigma dW(t) \tag{8}$$

Это уравнение рассматривается как непрерывная версия HL-модели, которую мы рассмотрим позже. В более общем случае можно показать, что когда волатильность v не является стохастической, $r(t)$ представляет собой марковский процесс, если и только если $v(t, T)$ имеет функциональный вид

$$v(t, T) = x(t)[y(T) - y(t)] \tag{9}$$

Процесс для r тогда имеет общий вид:

$$dr = [\theta(t) - \Phi(t)r]dt + \sigma(t)dW(t).$$

Эту модель краткосрочной процентной ставки называют расширенной моделью Васичека, поскольку по своей структуре она совпадает с ней, но в отличии от модели, рассмотренной в разделе 2.1, в ней функции дрейфа и волатильности зависят от времени.

Когда допускается, чтобы v было стохастическим, невозможно получить условие, подобное (9), для обеспечения марковсковости процессу r. Даже трудно найти какую-нибудь конкретную функцию v, чтобы она приводила к марковскому процессу r. Для расширения диапазона марковских моделей краткосрочной ставки, свободных от арбитража, используется альтернативный подход. Марковский нейтральный к риску процесс определяется для r через неизвестную функцию времени $\theta(t)$, и для выбора этой функции времени разрабатывается такая процедура, чтобы модель являлась согласованной с начальной временной структурой процентной ставки, что фактически было сделано в конце предыдущего раздела. Эта процедура, в свою очередь, может быть расширена, если ввести не одну, а две функции времени в выражение предполагаемого дрейфа для r, тогда модель может быть согласована как с исходной временной структурой, так и с исходной волатильностью данных.

Используя один фактор, но допуская, что дрейф процесса r явно зависит от времени, получаем относительно простую модель, которая учитывает информацию, содержащуюся в исходной временной структуре, об ожидаемом будущем тренде r. Альтернативным подходом является увеличение числа факторов.

Для моделей, принадлежащих к классу аффинной доходности и являющихся однородными по времени, можно получить следующие простые соотношения между мгновенной форвардной ставкой, краткосрочной процентной ставкой и параметрами, определяющими цену облигации (см. формулы (2.38) и (2.39) раздела 2.2):

$$f(t,t+\tau) = r(t)\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA}{d\tau},$$

$$f(t,t+\tau) = r(t) + \tilde{\mu}(r)B(\tau) - 0{,}5\sigma^2(r)B^2(\tau), \qquad (10)$$

где $\tilde{\mu}(r)$ является дрейфом краткосрочной процентной ставки, отрегулированным риском.

<u>Доказательство.</u> По определению (см. равенство (9) раздела 1.2),

$$f(t,t+\tau) = -\frac{1}{P(t,t+\tau)}\frac{\partial P(t,t+\tau)}{\partial \tau}.$$

С другой стороны, для моделей цены облигации однородных по времени в классе аффинной доходности, то есть для $P(t, r, t+\tau) = e^{A(\tau) - rB(\tau)}$, справедливы соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -B(\tau)P \ , \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = B(\tau)^2 P \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \left[r\frac{dB(\tau)}{d\tau} - \frac{dA}{d\tau} \right] P \ .$$

Из них, в частности, следует, что $f(t,t+\tau) = r(t)\dfrac{dB(\tau)}{d\tau} - \dfrac{dA}{d\tau}$. Далее, используя эти соотношения в уравнении (2.40) раздела 2.2, мы получим

$$0{,}5\sigma^2(r)B^2(\tau) - \tilde{\mu}(r)B(\tau) + f(t,t+\tau) - r(t) = 0 \ .$$

Откуда следует и второе равенство.

Функция $B(\tau)$, которая в существенной мере определяет форму временной структуры, имеет две относящиеся к делу интерпретации. Во-первых, $B(\tau)$ определяет временную структуру волатильности доходности. Действительно, как вытекает из определения доходности (формула (3) раздела 1.2),

$$y(t,r,t+\tau) = -\frac{\ln P(t,r,t+\tau)}{\tau} = \frac{B(\tau)}{\tau} r(t) - \frac{A(\tau)}{\tau} \ ,$$

поэтому

$$dy = [B(\tau)/\tau]\,\tilde{\mu}(r)dt + [B(\tau)/\tau]\,\sigma(r)dW(t) \ .$$

Отсюда видно, что волатильность доходности $y(t,r,t+\tau)$ дается выражением $[B(\tau)/\tau]\,\sigma(r)$. Во-вторых, $B(\tau)$ может рассматриваться как эквивалентная мера продолжительности срока действия облигации (дюрация, *duration measure*), которая обычно определяется как производная от цены облигации по доходности, взятая с обратным знаком (только в нашем случае производная берется по краткосрочной процентной ставке). Уравнение (10) показывает, что форвардная ставка является вогнутой (квадратичной) функцией такой меры дюрации $B(\tau)$.

Другими словами, из (10) мы имеем, что для моделей, которые принадлежат к классу аффинной доходности и являются однородными по времени, вторая производная форвардной процентной ставки $f(t, t+\tau)$ по «функции дюрации» $B(\tau)$, взятая с обратным знаком, равна мгновенной дисперсии краткосрочной ставки

$$-\frac{\partial^2 f(r,t,t+\tau)}{\partial^2 B(\tau)} = \sigma^2(r) \ .$$

МОДЕЛЬ HJM

Другой класс моделей временной структуры получается посредством использования процессов Ито для моделирования изменений всей кривой форвардной ставки. Хо и Ли (Ho & Lee, 1986) для дискретного времени предложили модель, которая автоматически приспосабливается к исходной временной структуре (она будет рассмотрена несколько позже). Хит, Джарроу и Мортон (Heath, Jarrow & Morton, 1992) распространили ее на случай непрерывного времени. В HJM модели в качестве вектора состояния принимается вся кривая форвардной ставки и предполагается, что ее изменение вызывается конечным числом стандартных броуновских движений. (Здесь мы для простоты рассмотрим только однофакторную модель, когда изменения форвардной ставки вызваны только одним броуновским движением.) Затем устанавливаются ограничения на дрейф процессов форвардной ставки для гарантии того, чтобы не появилось никаких арбитражных возможностей. Как и модель Блэка – Шоулса, HJM-модель не требует никаких предположений о предпочтениях инвесторов. В частности, не требуется оценок дрейфа или ожидаемых изменений ставок. Вообще в рамках этой модели процесс краткосрочной ставки (мгновенной спот ставки), лежащий в основе цен облигаций, является зависимым вдоль траектории и изменения краткосрочной ставки могут зависеть от всей ее истории. Это делает модель трудной для реализации с вычислительной точки зрения. К счастью, существует частный случай HJM модели (он будет рассмотрен ниже), в котором характер зависимости вдоль траектории краткосрочной процентной ставки описывается единственной достаточной статистикой и цены облигаций сравнительно легко вычисляются. Эта модель также автоматически приспосабливается к исходной временной структуре процентных ставок.

Построение HJM модели начинается с построения процесса Ито, моделирующего изменения всей кривой форвардных ставок. Математически для каждого фиксированного $T \geq 0$ предполагается, что форвардная ставка $f(t, T)$ в момент $t \leq T$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$df(t,T) = \mu_T(f(t,T), t)\, dt + \sigma_T(f(t,T), t)\, dW(t)$$

(индекс T подчеркивает зависимость дрейфа и волатильности от даты погашения облигации T) с начальным условием $f(0, T) = f(T)$, где $f(T)$ является исходной кривой форвардной ставки, вычисленной из исходной рыночной цены $P(T)$, или

$$f(T) = -\frac{d}{dT}\ln P(T) \ .$$

Для краткости мы будем использовать символы $\mu_T(t)$ и $\sigma_T(t)$ вместо $\mu_T(f(t,T), t)$ и $\sigma_T(f(t,T), t)$ соответственно. Таким образом,

$$df(t,T) = \mu_T(t)\, dt + \sigma_T(t)\, dW(t) \ . \tag{11}$$

Заменяя в уравнении (11) t на s и интегрируя по s от 0 до t, получим для любого $t \le T$

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu_T(s)ds + \int_0^T \sigma_T(s)dW(s) =$$

$$= f(T) + \int_0^t \mu_T(s)ds + \int_0^T \sigma_T(s)dW(s) \ , \qquad (12)$$

где $\{f(0,T)\ ,\ T \in [0,\tau]\}$ является исходной кривой форвардной ставки, вычисленной из текущих рыночных цен $\{P(0,T)\ ,\ T \in [0,\tau]\}$, и $\{W(t)\ ,\ t \ge 0\}$ является одномерным стандартным броуновским движением. Из формулы (12) ясно видно, что модель будет автоматически приспосабливаться к исходной временной структуре процентных ставок.

Мы сначала рассмотрим детерминированный случай, когда $\sigma_T(t) \equiv 0$ для всех $t \ge 0$. Из выражения (12) мы получим

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu_T(s)ds \ .$$

Чтобы это выражение удовлетворяло условиям (13) раздела 1.2, требуется выполнение равенства

$$\int_0^t \mu_T(s)ds = 0 \quad \text{для всех} \quad t \ge 0 \ ,$$

или

$$\mu_T(t) \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad t \ge 0 \ .$$

Другими словами, $\sigma_T(t) \equiv 0$ для всех $t \ge 0$ влечет $\mu_T(t) \equiv 0$ для всех $t \ge 0$. Следовательно, можем предположить, что существует функционал F такой, что

$$\mu_T(t) = \sigma_T(t)\, F \ .$$

Покажем (см. формулу (14) ниже), что это действительно верно и что

$$F = \int_t^T \sigma_s(t)ds - \lambda(r(t),t) \ .$$

Заметим, что из формул (13) раздела 1.2 и уравнения (11) настоящего раздела, следует равенство

$$P(t,T)=\exp\left[-\int_t^T f(t,s)ds\right].$$

Используя лемму Ито, отсюда можно получить

$$\frac{dP}{P}=\left\{r(t)-\left[\int_t^T \mu_s(t)ds\right]+\frac{1}{2}\left[\int_t^T \sigma_s(t)ds\right]^2\right\}dt-\left[\int_t^T \sigma_s(t)ds\right]dW(t)\ . \qquad (13)$$

Доказательство. Пусть

$$X(t)=\int_t^T f(t,s)ds\ ,$$

тогда

$$dX=d\left[\int_t^T f(t,s)ds\right]=$$

$$=\int_t^T [df(t,s)]ds-f(t,t)dt=\int_t^T [df(t,s)]ds-r(t)dt\ ,$$

где дифференциал вычисляется по t. Из уравнения (11)

$$df(t,T)=\mu_T(t)\,dt+\sigma_T(t)\,dW(t)\ .$$

следует, что

$$dX=\int_t^T [\mu_s(t)dt+\sigma_s(t)dW(t)]ds=$$

$$=\int_t^T [\mu_s(t)dt]ds+\int_t^T [\sigma_s(t)dW(t)]ds=$$

$$=\left[\int_t^T \mu_s(t)ds\right]dt+\left[\int_t^T \sigma_s(t)ds\right]dW(t).$$

Таким образом,

$$(dX)^2=\left[\int_t^T \sigma_s(t)ds\right]^2 dt\ ,$$

поскольку свойствами стандартного броуновского движения предполагается, что $[dW(t)]^2 = dt$ и $dW(t)dt = 0$, $(dt)^2 = 0$.

Из определения X мы имеем $P(t,T) = e^{-X}$.

Рассматривая $P(t,T)$ как показательную функцию X и применяя лемму Ито, мы получим

$$dP(t,T) = \frac{\partial P(t,T)}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(t,T)}{\partial X^2} (dX)^2 =$$

$$= -P(t,T)dX + \frac{1}{2} P(t,T)(dX)^2 .$$

Следовательно,

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = -dX + \frac{1}{2}(dX)^2 =$$

$$= \left\{ r(t) - \left[\int_t^T \mu_s(t) ds \right] + \frac{1}{2} \left[\int_t^T \sigma_s(t) ds \right]^2 \right\} dt - \left[\int_t^T \sigma_s(t) ds \right] dW(t) .$$

Сравнивая выражение (13) с формулой (2.30) из раздела 2.2, мы получим

$$\mu^T(t) = r(t) - \left[\int_t^T \mu_s(t) ds \right] + \frac{1}{2} \left[\int_t^T \sigma_s(t) ds \right]^2 ,$$

и

$$\sigma^T(t) = \int_t^T \sigma_s(t) ds .$$

Подстановка этих двух формул в условие отсутствия арбитража (2.33) раздела 2.2 дает равенство

$$r(t) - \left[\int_t^T \mu_s(t) ds \right] + \frac{1}{2} \left[\int_t^T \sigma_s(t) ds \right]^2 = r(t) + \lambda(r(t),t) \left[\int_t^T \sigma_s(t) ds \right] .$$

Дифференцирование последнего равенства по T и преобразование полученного выражения дают

$$\mu_T(t) = \sigma_T(t) \left[\int_t^T \sigma_s(t) ds - \lambda(r(t),t) \right] . \tag{14}$$

Подставляя выражение (14) в уравнение (11), мы получим безарбитражную характеризацию временной структуры в терминах форвардных ставок

$$df(t,T) = \sigma_T(t)\left[\int_t^T \sigma_s(t)ds - \lambda(r(t),t)\right]dt + \sigma_T(t)dW(t). \tag{15}$$

или эквивалентно

$$f(t,T) - f(T) = \int_0^t \sigma_T(s)\left[\int_s^T \sigma_u(s)du - \lambda(r(s),s)\right]ds + \int_0^t \sigma_T(s)dW(s). \tag{16}$$

HJM-модель предусматривает общие рамки для безарбитражной детализации динамики временной структуры процентных ставок. Чтобы найти «явный вид» решения для цен облигаций, как это удалось в предыдущем разделе (см. формулу (2.39) раздела 2.2), мы выберем следующий частный случай:

$$\sigma_T(t) = \sigma(t)\exp\left[-\int_t^T k(x)dx\right], \tag{17}$$

где $k(x)$ является функцией одной переменной.

В этом случае цены свободных от неуплаты дисконтируемых облигаций даются выражением

$$P(t,T) = \frac{P(T)}{P(t)}\exp\left\{-\beta(t,T)[r(t) - f(t)] - \frac{1}{2}[\beta(t,T)]^2\phi(t)\right\}, \tag{18}$$

где $P(T)$ является текущей рыночной ценой свободной от неуплаты дисконтируемой облигации с датой погашения T, а

$$\phi(t) = \int_0^t [\sigma_t(s)]^2 ds = \int_0^t \left\{\sigma(s)\exp\left[-\int_s^t k(x)dx\right]\right\}^2 ds,$$

$$\beta(t,T) = \int_t^T \exp\left[-\int_t^u k(x)dx\right]du$$

и

$$f(T) = -\frac{d}{dT}\ln P(T).$$

Цены облигаций $\{P(0,T)\}$ в момент 0 согласуются с текущими рыночными ценами $\{P(T)\}$ автоматически, поскольку $r(0) = f(0,0)$ и $\beta(t,t) = 0$. Изменение краткосрочной ставки определяется уравнением

$$dr(t) = \{k(t)[f(t) - r(t)] + \phi(t) - \sigma(t)\lambda(t) + \frac{d}{dt} f\left(t\right)\}dt + \sigma(t)dW(t) . \qquad (19)$$

<u>Доказательство.</u> Определим функции $G(t,T)$ и $K(t,T)$ соотношениями:

$$G(t,T) = f(t,T) - f(0,T) = f(t,T) - f(T) ,$$

и

$$K\left(t,T\right) = \exp\left[-\int_t^T k\left(x\right)dx\right] .$$

Из выражения (17) следует, что

$$\sigma_T(s) = \sigma(s)\, K(s,T) = \sigma(s)\, K(s, t)\, K(t,T) = \sigma_t(s)\, K(t,T) .$$

Применяя эту формулу к уравнению (16), мы получим

$$G\left(t,T\right) = \int_0^t \sigma_t\left(s\right)K\left(t,T\right)\left[\int_s^T \sigma_u\left(s\right)du - \lambda\left(s\right)\right]ds + \int_0^t \sigma_t\left(s\right)K\left(t,T\right)dW\left(s\right) .$$

Следовательно,

$$G\left(t,T\right) - K\left(t,T\right)\int_0^t \sigma_t\left(s\right)\left[\int_s^T \sigma_u\left(s\right)du\right]ds = K\left(t,T\right)\left[-\int_0^t \sigma_t\left(s\right)\lambda\left(s\right)ds + \int_0^t \sigma_t\left(s\right)dW\left(s\right)\right] ,$$

или

$$\frac{G\left(t,T\right)}{K\left(t,T\right)} - \int_0^t \sigma_t\left(s\right)\left[\int_s^T \sigma_u\left(s\right)du\right]ds = -\int_0^t \sigma_t\left(s\right)\lambda\left(s\right)ds + \int_0^t \sigma_t\left(s\right)dW\left(s\right) .$$

Так как правая часть этого равенства является независимой от T, левая часть должна быть также независимой от T. Так что мы имеем для любого $S \geq t$

$$\frac{G\left(t,T\right)}{K\left(t,T\right)} - \int_0^t \sigma_t\left(s\right)\left[\int_s^T \sigma_u\left(s\right)du\right]ds \equiv \frac{G\left(t,S\right)}{K\left(t,S\right)} - \int_0^t \sigma_t\left(s\right)\left[\int_s^S \sigma_u\left(s\right)du\right]ds .$$

Учитывая, что $K(t,t) = 1$, при $S = t$ мы получим

$$\frac{G(t,T)}{K(t,T)} - \int_0^t \sigma_t(s)\left[\int_s^T \sigma_u(s)du\right]ds \equiv G(t,t) - \int_0^t \sigma_t(s)\left[\int_s^t \sigma_u(s)du\right]ds \ ,$$

которое упрощается следующим образом:

$$G(t,T) = K(t,T)\left\{G(t,t) - \int_0^t \sigma_t(s)\left[\int_s^t \sigma_u(s)du\right]ds + \int_0^t \sigma_t(s)\left[\int_s^T \sigma_u(s)du\right]ds\right\} =$$

$$= K(t,T)\left\{G(t,t) + \int_0^t \sigma_t(s)\left[\int_t^T \sigma_u(s)du\right]ds\right\} =$$

$$= K(t,T)\left\{G(t,t) + \left[\int_0^t [\sigma_t(s)]^2 ds\right]\left[\int_t^T K(t,u)du\right]\right\} =$$

$$= K(t,T)\left\{G(t,t) + \phi(t)\left[\int_t^T K(t,u)du\right]\right\} =$$

$$= K(t,T)\left[G(t,t) + \phi(t)\beta(t,T)\right] . \tag{20}$$

Поскольку $\dfrac{\partial}{\partial T}\beta(t,T) = K(t,T)$, мы имеем

$$G(t,T) = \frac{d}{dT}\left[G(t,t)\beta(t,T) + \frac{1}{2}\phi(t)[\beta(t,T)]^2\right]. \tag{21}$$

Теперь мы готовы доказать справедливость формулы (18). Напомним, что $G(t,T) = f(t,T) - f(T)$. Из уравнения (13) получаем

$$P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,s)ds\right] =$$

$$= \exp\left[-\int_t^T [f(s) + G(t,s)]ds\right] =$$

$$= \exp\left[-\int_t^T f(s)ds\right]\exp\left[-\int_t^T G(t,s)ds\right] .$$

Поскольку $\exp\left[-\int\limits_t^T f(s)ds\right] = \dfrac{P(t,T)}{P(t)}$, то выражение (18) получаем, используя функцию (21):

$$P(t,T) = \frac{P(T)}{P(t)}\exp\left[-\int\limits_t^T G(t,s)ds\right] =$$

$$= \frac{P(T)}{P(t)}\exp\left\{-\beta(t,T)[r(t)-f(t)]-\frac{1}{2}[\beta(t,T)]^2\phi(t)\right\}.$$

Теперь докажем справедливость уравнения (19). Из формулы (13) раздела 1.2 мы имеем

$$dr(t) = [df(t,T)]\Big|_{T=t} + \left\{\left[\frac{\partial}{\partial T}f(t,T)\right]\Big|_{T=t}\right\}dt\ .$$

Из уравнения (15)

$$df(t,T)\,|_{T=t} = -\,\sigma(t)\,\lambda(t)\,dt + \ \sigma(t)\,dW(t)\ .$$

Из формулы (21)

$$f(t,T) = f(T) + K(t,T)\ [G(t,t) + \phi(t)\ \beta(t,T)]$$

и, следовательно,

$$\left[\frac{\partial}{\partial\ T}f(t,T)\right]\Big|_{T=t} = \frac{d}{dt}f(t) + k(t)[G(t,t)] + \phi(t) =$$

$$= \frac{d}{dt}f(t) + k(t)[f(t)-r(t)] + \phi(t)\ .$$

Из этих равенств и вытекает уравнение (19)

$$dr(t) = \{k(t)[f(t) - r(t)] + \phi(t) - \sigma(t)\lambda(t) + \frac{d}{dt}f(t)\}dt + \sigma(t)dW(t)\ .$$

Для иллюстрации использования результатов этого частного случая HJM модели рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть $\sigma(t,t) = \sigma\,|r(t)|^{1/2}$ и $k(x) = k$, где σ и k являются положительными константами. Мы выберем также $\lambda(t) = 0$. Тогда на основании (19) можно имитировать процесс получения краткосрочной процентной ставки для дискретного времени с помощью следующего рекуррентного соотношения

$$r(t) = r(t-1) + \mu(t)h + \sigma[h|r(t-1)|]^{1/2}\, e(t)\,,$$

где

$$\mu(t) = k(t)\,[f\,((t-1)h) - r(t-1)] + \tilde{\phi}(t) + \frac{f(th) - f((t-1)h)}{h}\,,$$

$$\tilde{\phi}(t) = \int_0^t [\sigma(s,s)K(s,t)]^2\, ds \approx \sigma^2 \sum_{i=0}^{t-1} |r(i)| e^{-2k(t-i)}\,,$$

$e(t)$ является нормальной (0,1) случайной величиной; h является длительностью временного интервала в годах. Используя выражение (18), мы можем затем вычислять и цены дисконтируемых облигаций.

Пример 2. Если $\sigma(t,t) \neq 0$ для всех $t \geq 0$, мы можем упростить описанную модель путем выбора $\lambda(t)$ такой, чтобы

$$\phi(t) - \sigma(t,t)\,\lambda(t) = 0\,.$$

Для простоты мы положим $\sigma(t,t) = \sigma$ и $k(x) = k$, где σ и k являются положительными константами. Тогда

$$\beta(t,T) = \frac{1}{k}\left(1 - e^{-k(T-t)}\right)\,,$$

$$\phi(t) = \frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right)$$

и

$$\lambda(t) = \frac{\phi(t)}{\sigma(t,t)} = \sigma\,\frac{\left(1 - e^{-2kt}\right)}{2k}\,,$$

которая является увеличивающейся функцией t. Тогда изменения краткосрочной ставки определяются уравнением

$$dr(t) = \{k(t)[f(t) - r(t)] + \frac{d}{dt} f(t)\}dt + \sigma(t)dW(t)\,.$$

Из формулы (18) следует, что цены облигаций в момент t выражаются в терминах текущих цен, краткосрочной ставки в момент t и аккумулированной к моменту t дисперсии форвардных ставок. Это является важной особенностью рассмотренного частного случая HJM-модели. Общая HJM-модель основывается на использовании процессов Ито для моделирования изменений всей кривой форвардных ставок. Для рассмотренного нами частного случая HJM-модели мы можем основываться на использовании уравнения (19), чтобы моделировать краткосрочную ставку. Эта процедура упрощает создание сценариев процентной ставки.

Приведенный частный случай HJM модели можно рассматривать как обобщенную модель Васичека и CIR в смысле возможности исследования аналитическим путем динамики временной структуры процентных ставок, в то же самое время не предполагая никаких конкретных требований относительно волатильности процесса краткосрочной ставки и рыночной цены риска.

Приведем вкратце последовательность действий при использовании HJM модели в нейтральной к риску среде (мы выбираем этот частный случай, поскольку задание рыночной цены риска является довольно сложным и до сих пор не разработанным в деталях делом, так что полагаем $\lambda(r,t) = 0$). Самое основное в этом методе - выбор волатильности процесса форвардной ставки.

- Если волатильность $\sigma_T(t)$ конкретизирована, тогда дрейф форвардных ставок определится по формуле (14) как

$$\mu_T(t) = \sigma_T(t)\int_t^T \sigma_s(t)ds \ .$$

- После этого необходимо проанализировать состояние рынка и определить исходную структуру форвардной ставки $\{f(T)\ , T \geq 0\}$.
- Теперь по формуле (16) можно вычислять форвардные ставки для текущего времени t

$$f(t,T) = f(T) + \int_0^t \mu_T(s)ds + \int_0^t \sigma_T(s)dW(s).$$

- Наконец, вычисляем цены облигаций по формуле

$$P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,s)ds\right].$$

Пример 3. Чтобы увидеть, как работает эта методика, мы рассмотрим простейший пример, в котором предполагается, что волатильность является постоянной и равной σ. Тогда процесс дрейфа получается в виде

$$\mu_T(t) = \sigma\int_t^T \sigma\ ds = \sigma^2(T-t)\ .$$

Поэтому процесс форвардной ставки приобретает форму

$$f(t,T) = f(T) + \int_0^t \sigma^2 (T-s) ds + \int_0^t \sigma \, dW(s) \, ,$$

т. е.

$$f(t,T) = f(T) + \sigma^2 t \, (T - t/2) + \sigma W(t) \, ,$$

где $W(t)$ – винеровский процесс, а именно для всякого фиксированного t – это нормально распределенная случайная величина с нулевым средним и дисперсией, равной t. Так что краткосрочная процентная ставка является процессом

$$r(t) = f(t,t) = f(t) + 0{,}5\sigma^2 t^2 + \sigma W(t) \, ,$$

изменяющимся согласно уравнению

$$dr(t) = [\frac{df(t)}{dt} + \sigma^2 t] \, dt + \sigma dW(t) \, ,$$

которое соответствует HL-модели для непрерывного времени, согласованной с исходной временной структурой. На этом примере удобно отметить ту легкость, с которой модель согласовывается с исходной временной структурой. Ценой, которую приходится платить за достижение этой легкости, является то, что марковское свойство краткосрочной процентной ставки $r(t)$ часто теряется, при этом увеличивается вычислительная сложность проблемы.

РАСШИРЕННАЯ МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА

Рассмотрим теперь способ согласования теоретической временной структуры, которая получается с помощью однофакторной модели, с исходной временной структурой, предложенный Халлом и Уайтом (Hull & White, 1990). В HW-модели предполагается, что процесс краткосрочной процентной ставки удовлетворяет уравнению

$$dr = \{\Phi(t) - ar\} \, dt + \sigma dW(t) \, , \qquad (22)$$

где a и σ являются константами, в то время как Φ – детерминированная функция времени. В этой модели a и σ обычно выбираются так, чтобы получить достаточно удобную структуру волатильности, в то время как Φ выбирается таким образом, чтобы согласовать теретические цены облигации $\{P(0, T), T > 0\}$ с реально наблюдаемой кривой доходности $\{P(T); T > 0\}$. Принятая модификация не выводит модель из класса аффинных моделей, так что цены облигаций даются равенством

$$P(t,T) = \exp\{A(t,T) - B(t,T) \, r(t)\} \, , \qquad (23)$$

где A и B являются решением системы

$$\frac{\partial B(t,T)}{\partial t} = aB(t,T) - 1\ , \qquad\qquad B(T,T) = 0\ ,$$

$$\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = \Phi(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\ \sigma^2 B^2(t,T)\ , \quad A(T,T) = 0\ .$$

Решение этой системы получается в виде

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)\ , \tag{24}$$

$$A(t,T) = \int_t^T \ \{\frac{1}{2}\sigma^2 B^2(s,T) - \Phi(s)B(s,T)\}\ ds\ . \tag{25}$$

Теперь нам нужно согласовать теоретические цены, получаемые по формулам (23) – (25), с исходными реально наблюдаемыми ценами. Это удобно сделать, используя форвардные процентные ставки. Как мы уже знаем, через форвардные ставки цены облигации определяются по формуле

$$P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,s)ds\right]\ .$$

Так как имеется взаимно однозначное соответствие между форвардными ставками и ценами облигаций, мы можем сразу же согласовать теоретическую кривую форвардной ставки $\{f(0,T),\ T > 0\}$ с реально определяемой исходной кривой форвардных ставок $\{f(T),\ T > 0\}$, где исходная форвардная ставка $f(T)$ определяется равенством $f(T) = -\dfrac{\partial \ln P(T)}{\partial T}$. В аффинной модели форвардные нормы удовлетворяют соотношениям (10), поэтому

$$f(0,T) = r(0)\frac{\partial\ B(0,T)}{\partial\ T} - \frac{\partial\ A}{\partial\ T}\ ,$$

которое после подстановки в него выражений (24) – (25) приобретает вид

$$f(0,T) = e^{-aT}\, r(0) + \int_0^T e^{\ -a\,(T-s)}\Phi(s)ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT})^2.$$

Таким образом, нашей задачей является для заданной наблюдаемой структуры форвардной ставки $f(T)$ найти такую функцию $\varPhi$, которая удовлетворяла бы уравнению

$$f(T) = e^{-aT}\, r(0) + \int_0^T e^{-a(T-s)} \varPhi(s)\, ds + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1- e^{-aT})^2, \text{ для всех } \quad T > 0.$$

Для решения этого уравнения представим $f(T)$ в виде суммы

$$f(T) = x(T) + g(T),$$

где x и g определяются уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -\, a\, x(t) + \varPhi(t)\,, \qquad x(0) = r(0)\,.$$

$$g(t) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1- e^{-aT})^2 = \frac{\sigma^2}{2} B^2(0,\, t)\,.$$

Тогда мы получим

$$\varPhi(T) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=T} + a\, x(T) \; = \frac{df(T)}{dT} - \frac{dg(T)}{dT} + a\, x(T) \; =$$

$$= \frac{df(T)}{dT} - \frac{dg(T)}{dT} + a\{\, f(T) - g(T)\}. \tag{26}$$

Таким образом, мы доказали следующий результат. Пусть на основе рыночных наблюдений мы имеем (произвольную) кривую цен облигаций $\{P(T),\, T > 0\}$, подчиняющуюся только условию, что $P(T)$ является дважды дифференцируемой по T. Тогда функция $\varPhi$, задаваемая выражением (26), определяет временную структуру $\{P(0,\, T),\, T > 0\}$ так, что $P(0,\, T) = P(\, T)$ для всех $T > 0$. Выбирая $\varPhi$ согласно (26) мы определяем эту функцию для конкретно выбранных a и σ . Если мы хотим вычислить теоретические цены облигации при таком выборе, мы должны подставить функцию $\varPhi$ в виде (26) в выражение (25). Затем необходимо выполнить интегрирование и подставить этот результат в уравнение (23). Это позволяет получить выражение

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\{B(t,T) f(t) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t,T)(1- e^{-2aT}) - B(t,T) r(t)\}\,,$$

где функция $B(t,T)$ определяется формулой (24).

2.4 ДВУХФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

В этом разделе распространим детерминированную модель временной структуры, рассмотренную в разделе 1.2, на случай, когда переменные состояния являются стохастическими. В детерминированной версии только мгновенная реальная процентная ставка $R(t)$ и мгновенная норма инфляции $\pi(t)$ являются переменными, определяющими временную структуру. По аналогии в условиях неопределенности мы также предположим, что мгновенная ожидаемая реальная процентная ставка $R(t)$ и мгновенная предвидимая (или ожидаемая) норма инфляции $\pi(t)$ являются переменными, определяющими временную структуру.

Оправданием для такого предположения является то, что R и π характеризуют целесообразность владения долгосрочными облигациями. Действительно, когда $R(t)$ и $\pi(t)$ являются предсказуемыми частями дохода при владении капиталом и товарами потребления соответственно, их значения до погашения долгосрочной дисконтируемой облигации измеряют цену того, что инвестор не использует возможность инвестирования своих средств для владения капиталом и товарами потребления.

По аналогии с детерминированным случаем определим стохастический процесс, описывающий изменения переменных состояния. Подобно тому как в детерминированном случае мы использовали обыкновенные дифференциальные уравнения для описания динамики $R(t)$ и $\pi(t)$, теперь для описания динамики в условиях неопределенности мы используем стохастические дифференциальные уравнения:

$$dR(t) = \alpha_R(R(t),\pi(t))\, dt + \sigma_R(R(t),\pi(t))\, dW_R(t)\ ,\ \sigma_R > 0\ , \tag{1}$$

и

$$d\pi(t) = \alpha_\pi(R(t),\pi(t))\, dt + \sigma_\pi(R(t),\pi(t))\, dW_\pi(t)\ ,\ \sigma_\pi > 0\ . \tag{2}$$

Слагаемое $dW_R(t)$ представляет инфинитезимальное приращение винеровского стохастического процесса $W_R(t)$. По определению, $dW_R(t)$ является нормально распределенной случайной величиной с нулевым средним и дисперсией dt. Следовательно, с эмпирической точки зрения уравнение (1) означает, что приращение реальной процентной ставки на последующем инфинитезимальном временном интервале является нормально распределенным с математическим ожиданием $\alpha_R\, dt$ и дисперсией $\sigma_R\, dt$; все моменты более высоких порядков имеют порядок малости не менее, чем $(dt)^{3/2}$ и ими можно пренебречь. Подобная интерпретация может быть дана и для процесса инфляции, определяемого уравнением (2).

В общем случае процессы $W_R(t)$ и $W_\pi(t)$ могут быть коррелированными. Ковариацию приращений процессов $R(t)$ и $\pi(t)$ обозначим как

$$\sigma_{R\pi}\, dt \equiv E[dR(t)d\pi(t)]\ .$$

Из соображений удобства введем мгновенную матрицу ковариаций

$$\Sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_R^2 & \sigma_{R\pi} \\ \sigma_{R\pi} & \sigma_\pi^2 \end{bmatrix},$$

которая предполагается положительно определенной. Также из соображений простоты обозначим вектор стохастической составляющей ставок через

$$\sigma dW \equiv \begin{bmatrix} \sigma_R dW_R \\ \sigma_\pi dW_\pi \end{bmatrix}.$$

При формализации динамики состояния стохастических дифференциальных уравнений подразумеваются два важных предположения. Первым является то, что R и π представляют собой двумерный марковский процесс, в случае которого знания текущих значений $R(t)$ и $\pi(t)$ достаточно для определения распределения $R(s)$ и $\pi(s)$ для всех $s \geq t$. Вторым является то, что R и π изменяются непрерывно. Это означает, что не может быть никаких скачков переменных состояния, то есть никаких больших мгновенных потрясений в экономике. Так что, уравнения (1) и (2) ограничивают динамику состояния классом непрерывных марковских процессов, называемых диффузионными процессами.

Уровень потребительских цен $C(t)$ тоже является стохастически изменяющимся согласно уравнению

$$\frac{dC(t)}{C(t)} = \pi(t)\, dt + \sigma_C(R(t),\pi(t))\, dW_C(t)\,,\ \sigma_C > 0\,. \qquad (3)$$

Левая часть уравнения (3) является темпом инфляции, т. е. полного изменения уровня потребительских цен. В правой части (3) он разделяется на две составляющих: на предвидимую инфляцию $\pi(t)dt$ и непредсказуемую инфляцию $\sigma_C\, dW_C(t)$. Следует отличать стохастическую составляющую непредсказуемой инфляции $\sigma_C\, dW_C(t)$ от стохастической составляющей приращения предвидимой инфляции $\sigma_\pi\, dW_\pi(t)$. Например, первая может быть вызвана непредсказуемыми шоковыми возмущениями денежных ресурсов, в то время как вторая может быть вызвана непредсказуемым изменением скорости роста денежных ресурсов.

Как и раньше, обозначим цену в момент t дисконтируемой облигации, погашаемой в дату T, при заданных переменных состояния $R(t)$ и $\pi(t)$ через $P(t,T, R(t), \pi(t))$. Очевидно, что при погашении при $t = T$

$$P(t,T, R(t), \pi(t)) = 1, \qquad (4)$$

так как облигация является свободной от неуплаты. При помощи леммы Ито находим мгновенную ставку доходности облигации в виде

$$\frac{dP(R,\pi,t,T)}{P(R,\pi,t,T)} = \mu(t,T,R,\pi)\,dt + s_R(t,T,R,\pi)dW_R(t) + s_\pi(t,T,R,\pi)dW_\pi(t)\,, \quad (5)$$

где

$$\mu(t,T,R,\pi) = \frac{1}{P}\left[\frac{\sigma_R^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{\sigma_\pi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \pi^2} + \sigma_{R\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial R \partial \pi} + \alpha_R \frac{\partial P}{\partial R} + \alpha_\pi \frac{\partial P}{\partial \pi} + \frac{\partial P}{\partial t}\right], \quad (6)$$

$$s_R(t,T,R,\pi) = \frac{\sigma_R}{P}\frac{\partial P}{\partial R} \quad (7)$$

и

$$s_\pi(t,T,R,\pi) = \frac{\sigma_\pi}{P}\frac{\partial P}{\partial \pi}\,. \quad (8)$$

Правая часть уравнения (5) имеет очевидную интерпретацию, μ является ожидаемой ставкой доходности, $s_R dW_R$ – непредсказуемой прибылью, вызванной изменением R, и $s_\pi dW_\pi$ имеет подобную же интерпретацию.

Ставка доходности на погашаемую в текущий момент облигацию является номинальной безрисковой мгновенной процентной ставкой. Для погашаемой в текущий момент облигации $t = T$ и из условия (4) имеем, что

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial P}{\partial \pi} = \frac{\partial^2 P}{\partial R \partial \pi} = \frac{\partial^2 P}{\partial R^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial \pi^2} = 0\,.$$

Поэтому формула (5) сводится к равенству

$$\frac{dP(R,\pi,t,T)}{P(R,\pi,t,T)} = \frac{\partial P(R,\pi,t,T)}{\partial t} \equiv r\,dt\,, \quad (9)$$

где r является мгновенной номинальной процентной ставкой. Поскольку стохастическое слагаемое из уравнения (5) в (9) отсутствует, облигация, погашаемая в текущий момент, не порождает никакого риска в номинальной ставке.

Облигация, погашаемая в текущий момент, однако, порождает реальный риск, как показывает вариант уравнения Фишера в непрерывном времени. Реальная цена облигации $B(t,T,R,\pi)$ может быть найдена путем деления номинальной цены $P(t,T,R,\pi)$ на уровень потребительских цен $C(t)$

$$B(t,T,R,\pi) = P(t,T,R,\pi)\,/\,C(t)\,. \quad (10)$$

Использование леммы Ито позволяет найти уравнение для реальной ставки доходности на дисконтируемую облигацию:

$$\frac{dB}{B}=\frac{dP(t,T,R,\pi)}{P(t,T,P,\pi)}-\frac{dC(t)}{C(t)}+\left(\frac{dC(t)}{C(t)}\right)^2-\left(\frac{dC(t)}{C(t)}\right)\left(\frac{dP(t,T,R,\pi)}{P(t,T,P,\pi)}\right)=$$

$$=\left(\mu-\pi+\sigma_C^2-\frac{\sigma_{RC}}{P}\frac{\partial P}{\partial R}-\frac{\sigma_{\pi C}}{P}\frac{\partial P}{\partial \pi}\right)dt+s_R dW_R+s_\pi dW_\pi-\sigma_C dW_C. \quad (11)$$

В уравнении (11) $\sigma_{RC}\,dt$ является мгновенной ковариацией между непредсказуемыми изменениями R и непредсказуемой частью инфляции, то есть

$$\sigma_{RC}\,dt\equiv E\left[dR\frac{dC}{C}\right]. \quad (12)$$

Аналогично

$$\sigma_{\pi C}\,dt\equiv E\left[d\pi\frac{dC}{C}\right]. \quad (13)$$

Для облигации, погашаемой в текущий момент времени, $\frac{\partial P}{\partial R}=\frac{\partial P}{\partial \pi}=0$ и $\mu=r$, так что

$$\frac{dB(t,t,R,\pi)}{B(t,t,R,\pi)}=\left(r-\pi+\sigma_C^2\right)dt-\sigma_C dW_C\ . \quad (14)$$

Но ожидаемая мгновенная реальная ставка доходности на облигацию, погашаемую в текущий момент, по определению, равна $R(t)$, то есть

$$Rdt=E\left[\frac{dB(t,t,R,\pi)}{B(t,t,R,\pi)}\right]=\left(r-\pi+\sigma_C^2\right)dt \qquad \text{или} \qquad r=R+\pi-\sigma_C^2\,. \quad (15)$$

Уравнение (15) представляет собой версию уравнения Фишера для непрерывного времени (детерминированной версией уравнения Фишера является равенство (15) раздела 1.2).

Теперь дадим арбитражное обоснование, которое приводит к уравнению в частных производных для цен облигаций. Рассуждения аналогичны тем, которые использовали Блэк и Шоулс (Black & Scholes, 1973), но имеют одно важное отличие: переменной состояния в модели Блэка – Шоулса была цена актива, который мог бы комбинироваться с финансовыми производными (в модели

Блэка – Шоулса это колл опционы) для образования безрискового актива. В наших рассуждениях цены актива не являются переменными состояния и поэтому они не могут быть использованы для формирования портфеля. Более того, тот факт, что R и π не являются ценами, лишает нас возможности воспользоваться следующими полезными аргументами.

Можно было бы утверждать, что арбитражные аргументы не опираются на какие-либо отношения частных рисков инвесторов. Поэтому при нахождении решений результирующего уравнения целесообразно было бы принимать, по возможности, простейшие рисковые отношения, такие как нейтральность к риску. Следовательно, задача могла бы быть решена для *всех* инвесторов в предположении, что ожидаемые мгновенные ставки доходности рыночных активов являются одинаковыми. К сожалению, R и π не являются рыночными активами, так что показатели их ожидаемого изменения не могут быть приняты в качестве обычных ставок доходности всех рыночных активов. Поэтому такие аргументы не могут быть использованы.

Несмотря на это, безрисковый портфель Блэка – Шоулса можно сформировать, используя дисконтируемые облигации. Выберем произвольно три облигации с различными датами погашения T_1, T_2 и T_3 и объединим их в портфель в пропорциях x_1, x_2 и $x_3 = 1 - x_1 - x_2$, соответственно. Ставка доходности такого портфеля, определяемая как dH/H, задается уравнением

$$\frac{dH(t)}{H(t)} = [\, x_1\mu(T_1) + x_2\mu(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\,\mu(T_3)]dt +$$

$$+ [\, x_1 s_R(T_1) + x_2 s_R(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\, s_R(T_3)]dZ_R +$$

$$+ [\, x_1 s_\pi(T_1) + x_2 s_\pi(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\, s_\pi(T_3)]dZ_\pi\,. \tag{16}$$

В обозначениях формулы (16) для краткости опущены зависимости от t, R и π. При отсутствии расходов на сделки этот портфель может постоянно проверяться так, чтобы в каждый момент времени t портфель не имел мгновенной дисперсии. Но для того, чтобы избежать арбитражных возможностей, безрисковый портфель должен иметь (ожидаемую и реализуемую) ставку доходности, равную превалирующей номинальной безрисковой процентной ставке. Поэтому, если выбрать x_1 и x_2 такими, что

$$x_1 s_R(T_1) + x_2 s_R(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\, s_R(T_3) = 0 \tag{17}$$

и

$$x_1 s_\pi(T_1) + x_2 s_\pi(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\, s_\pi(T_3) = 0\,, \tag{18}$$

то ставка доходности портфеля в условиях равновесия определяется равенством

$$rdt = \frac{dH(t)}{H(t)} = [\, x_1\mu(T_1) + x_2\mu(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\,\mu(T_3)]dt\,,$$

откуда

$$r = x_1\mu(T_1) + x_2\mu(T_2) + (1 - x_1 - x_2)\,\mu(T_3). \tag{19}$$

Система уравнений (17) – (19) подразумевает линейное соотношение между риском и отдачей дисконтируемых облигаций. Уравнения (17) - (19) имеют решение для произвольных T_1, T_2 и T_3, если и только если для всех T существуют функции $\phi_R(t,R,\pi)$ и $\phi_\pi(t,R,\pi)$, не зависимые от даты погашения T, такие, что

$$\mu(T) - r = \phi_R(t,R,\pi)\, s_R(T) + \phi_\pi(t,R,\pi)\, s_\pi(T)\,. \tag{20}$$

Левая часть равенства (20) является мгновенным превышением ожидаемой ставки дохода облигации с датой погашения T. Очевидно, что ϕ_R можно интерпретировать как «цену» риска реальной процентной ставки, так как $s_R(T)$ является мгновенным стандартным отклонением изменений дохода облигации с датой погашения T, индуцированных случайными изменениями ставки R. Аналогично ϕ_π является «ценой» риска инфляции. Эти «цены» определяются при равновесии как функции индивидуальных предпочтений инвестора. Обычно s_R и s_π являются отрицательными (так как увеличение R и π вызывает падение цен облигаций, т. е. $\partial P/\partial R < 0$ и $\partial P/\partial \pi < 0$; хотя никакого строгого доказательства того, что всегда $\partial P/\partial R < 0$ и $\partial P/\partial \pi < 0$, неизвестно), так что ϕ_R и ϕ_π являются отрицательными, если инвесторы рассчитывают, что ликвидность и ожидаемые доходы на долгосрочные облигации будут больше, чем на краткосрочные облигации. Аналогично ϕ_R и ϕ_π будут положительными, если краткосрочные облигации являются более рискованными в планах потребления инвесторов.

Уравнение в частных производных для цен дисконтируемых облигаций можно легко получить путем дифференцирования (20). Подставляя выражения (6), (7) и (8), явные выражения для μ, s_R и s_π, в формулу (20) и переставляя слагаемые, можно получить

$$\frac{\sigma_R^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{\sigma_\pi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \pi} + \sigma_{R\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial R\partial \pi} + \left(\alpha_R - X_R\right)\frac{\partial P}{\partial R} + \left(\alpha_\pi - X_\pi\right)\frac{\partial P}{\partial \pi} - rP + \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \tag{21}$$

где поправки средних (или отрегулированные цены риска) определяются выражением

$$X = \begin{bmatrix} X_R \\ X_\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R \phi_R \\ \sigma_\pi \phi_\pi \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что равенство (21) является дифференциальным уравнением в частных производных, которое с учетом граничных условий (4) при $P \ge 0$ может быть разрешено относительно цен дисконтируемых облигаций так же, как мы это делали в подобных случаях ранее (см., например, раздел 2.1).

Единственным общим решением уравнения (21) является

$$P(t,T,R,\pi) = E_t \exp\left[-\int_t^T \left(r(s) + \frac{1}{2} X^T \Sigma^{-1} X\right) ds - \int_t^T X^T \Sigma^{-1} \sigma dW\right], \tag{22}$$

где E_t – оператор условного математического ожидания при фиксированных переменных состояния в момент времени t. Второй интеграл в показателе экспоненты является стохастическим интегралом, который является случайным процессом с нулевым средним для всех $T \ge t$. То, что выражение (22) является решением (21), легко проверяется следующим способом, который был использован нами и ранее (например, когда в разделе 1.2 мы показывали, что выражение (23) является решением (22)). Определим

$$y(s) = P(s,T,R,\pi)\exp[A(s)], \tag{23}$$

где

$$A(s) = -\int_t^s \left(r(u) + \frac{1}{2} X^T \Sigma^{-1} X\right) du - \int_t^s X^T \Sigma^{-1} \sigma dW(u). \tag{24}$$

По лемме Ито

$$dy(s) = e^{A(s)}[dP + PdA + 0{,}5\,P(dA)^2 + (dP)(dA)] =$$

$$= e^{A(s)}\left[\frac{\sigma_R^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{\sigma_\pi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \pi} + \sigma_{R\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial R \partial \pi} + (\alpha_R - X_R)\frac{\partial P}{\partial R} + \right.$$

$$\left. + (\alpha_\pi - X_\pi)\frac{\partial P}{\partial \pi} - rP + \frac{\partial P}{\partial t}\right] ds + e^{A(s)}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial R}\frac{\partial P}{\partial \pi}\right) - PX^T\Sigma^{-1}\right]\sigma dW =$$

$$= e^{A(s)}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial R}\frac{\partial P}{\partial \pi}\right) - PX^T\Sigma^{-1}\right]\sigma dW, \tag{25}$$

где последнее равенство следует из уравнения (21). Вычислив математическое ожидание обеих частей равенства (25), мы получим, что $E[dy(s)] = 0$, так что $y(s)$ является мартингалом и

$$E_t[\, y(s)|y(t)] = y(t)\ . \tag{26}$$

Решение уравнения (21) при $s = T$ дает выражение (22), так как $P(T,T,R,\pi) =1$ и $A(t) = 0$.

Формула (22) определения цены облигации аналогична формуле дисконтирования в детерминированном случае (см. формулу (11) в разделе 1.2) и интерпретируется подобным же образом. Формула (11) раздела 1.2 подразумевает, что в детерминированном случае сумма $1 , которая должна быть выплачена инвестору в будущем, дисконтируется к настоящему времени t при известной мгновенной номинальной безрисковой процентной ставке. Формула (22) подразумевает, что выручка инвестора $1 сначала дисконтируется при случайной номинальной процентной ставке, отрегулированной риском реальной процентной ставки и риском инфляции, а затем вычисляется математическое ожидание от этой случайной настоящей стоимости.

Простая арбитражная аргументация показывает, что если $r(t) \geq 0$, то все форвардные ставки должны быть неотрицательными. Поэтому формула определения цены облигации (22) должна иметь такое же свойство, чтобы соотношения равновесия удовлетворялись.

Легко показать, что выражение (22) подразумевает, что все форвардные ставки являются неотрицательными, если $r(t) \geq 0$ для всех t . Из формулы (9) раздела 1.2 мы видим, что $\partial P(t,T, R,\pi) /\partial T \leq 0$ влечет, что все мгновенные форвардные ставки неотрицательны. Использование леммы Ито при дифференцировании выражения (22) дает

$$\partial P(t,T, R,\pi) /\partial T = - E[r(T)e^{A(T)}] \leq 0\ , \tag{27}$$

где $A(T)$ определяется формулой (24). Таким образом, все мгновенные форвардные ставки являются неотрицательными. Но после интегрирования это влечет и неотрицательность всех форвардных ставок.

Наконец, важным следствием формулы (22) определения цены облигации является то, что гипотеза несмещенных ожиданий в общем случае является несостоятельной в рассматриваемой модели. Заметим, что подобное заключение выводится и для модели, которая включает сколь угодно большое число переменных состояния. Однако можно найти определенные ограничения, при которых эта гипотеза все же оказывается справедливой. Гипотеза несмещенных ожиданий устанавливает, что ожидаемая мгновенная процентная ставка $E_t[r(T)]$ в момент погашения T равна текущей мгновенной форвардной ставке в момент T, то есть

$$E_t[r(T)] = f\left(t,T\right) = -\frac{1}{P\left(t,T,R,\pi\right)}\frac{\partial\ P\left(t,T,R,\pi\right)}{\partial\ T}\,. \tag{28}$$

Подставляя выражения (22) и (27) в равенство (28) получим

$$E_t[r(T)] = \frac{E_t\left[r(T)e^{A(T)}\right]}{E_t\left[e^{A(T)}\right]}$$

или

$$E_t[r(T)e^{A(T)}] = E_t[r(T)]\ E_t[e^{A(T)}]\ . \tag{29}$$

Для любых цен риска ϕ_R и ϕ_π (даже нулевых) случайные величины $r(T)$ и $e^{A(T)}$ в общем случае являются коррелированными и поэтому формула (29) не может быть справедливой в общем случае. В частности, (29) не может удовлетворяться по неравенству Иенсена, когда не имеется никакого премиального слагаемого, то есть $X = 0$.

Другая форма гипотезы ожиданий, в которой ожидаемая мгновенная реальная ставка доходности одинакова для всех сроков погашения, является справедливой. (Она получается, если, например, все инвесторы нейтральны к риску. То есть инвесторы оценивают полезность срока службы потребления величиной $\int_0^T e^{-st}c(t)dt$, где $c(t)$ выражается в единицах товара потребления.) При этой гипотезе одинаковой ставки доходности предположим

$$E\frac{dB(t,T,R,\pi)}{B(t,T,R,\pi)} = Rdt \quad \text{для всех } T \geq t\ . \tag{30}$$

Подстановка выражения (11) в уравнение (30) дает

$$\frac{\sigma_R^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial R^2} + \frac{\sigma_\pi^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial \pi} + \sigma_{R\pi}\frac{\partial^2 P}{\partial R \partial \pi} + \left(\alpha_R - \sigma_R\right)\frac{\partial P}{\partial R} + \left(\alpha_\pi - \sigma_\pi\right)\frac{\partial P}{\partial \pi} - rP + \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \tag{31}$$

так как $r = R + \pi - \sigma_P^2$. Очевидно, что уравнения (31) и (21) эквивалентны при

$$X_R = \sigma_{RP} \quad \text{и} \quad X_\pi = \sigma_{\pi P}\ . \tag{32}$$

Таким образом, X_R и X_π полностью определяются динамикой переменных состояния.

Решение (31) имеет особенно интересную интерпретацию, которая является аналогом формулы (29) детерминированного случая (раздел 1.2) при неопределенности. Тем же самым способом, который применялся, чтобы показать, что выражение (22) является решением (21), можно показать, что решение уравнения (31) является таким, что

$$\frac{P(t,T,R,\pi)}{C(t)} = E_t\left[\exp\left(-\int_t^T R(s)ds \Big/ C(T)\right)\right]. \tag{33}$$

Заметим, что эквивалентной формой решения (22) является следующая:

$$P(t,T,R,\pi) = E_t\left\{\frac{C(t)}{C(T)}\exp\left[-\int_t^T\left[R(s)-\frac{1}{2}(\sigma_C + x)^T\Sigma^{-1}(\sigma_C - x)\right]ds + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^T(\sigma_C - x)^T\Sigma^{-1}\sigma dW(s)\right]\right\},$$

где $\sigma_P = \begin{bmatrix}\sigma_{RC}\\ \sigma_{\pi C}\end{bmatrix}$. Она сводится к виду (33) только тогда, когда $x = \sigma_C$, т. е. когда $X_R = \sigma_{RC}$, $X_\pi = \sigma_{\pi C}$. Левая часть равенства (33) является текущей реальной ценой облигации, которая равна ожидаемой стоимости реальной выручки $1/C(T)$, дисконтированной при реальной процентной ставке. Из равенства (29) раздела 1.2 мы видим, что это всегда справедливо и в детерминированном случае. Однако из равенства (33) следует, что в рассматриваемом варианте оно является решением только тогда, когда цены облигации определяются при условии одинаковых реальных ставок доходностей.

Пример. Для большей ясности теоретического анализа, можно рассмотреть пример, подобный тому, который использовался в детерминированном случае в разделе 1.2. Пусть динамика для R и π задается уравнениями

$$dR(t) = -a(R - R^*)\,dt + \sigma_R R^{1/2} dW_R(t) \tag{34}$$

и

$$d\pi(t) = -c(\pi - \pi^*)\,dt + \sigma_\pi \pi^{1/2} dW_\pi(t)\,. \tag{35}$$

Этот тип диффузионных процессов представлен нами в разделе 2.2, где было показано, что $R(t) \geq 0$, если $aR^* \geq 0$. Среднее и дисперсия $R(s)$ для $s \geq t$ равны

$$E[R(s)] = R^* + (R(t) - R^*)\ e^{-a(s-t)} \tag{36}$$

и

$$\mathrm{Var}[R(s)] = \frac{\sigma_R^2}{2}(1 - e^{-a(s-t)})[R^*(1 - e^{-a(s-t)}) + 2R(t)\,e^{-a(s-t)}]. \tag{37}$$

Среднее и дисперсия находятся из преобразования Лапласа плотности вероятностей процесса $R(t)$, которое было найдено Феллером (1951) в виде

$$L(t,u) \equiv E[e^{-uR(t)}] = \left(\frac{a}{a+\frac{u}{2}\sigma_R^2\left(1-e^{-at}\right)}\right)^{2aR^*/\sigma_R^2}\exp\left[\frac{-uae^{-at}R(0)}{a+\frac{u}{2}\sigma_R^2\left(1-e^{-at}\right)}\right].$$

Сравнив формулу (36) с формулой (32) раздела 1.2, мы увидим, что условное среднее $R(s)$ при фиксированном $R(t)$ ведет себя точно таким же образом, как процесс $R(s)$ в примере для детерминированного случая. Однако неопределенность добавляет случайную компоненту, условная дисперсия которой ограничена и с увеличением $(s - t)$ стремится к $\sigma_R^2 R^*/2a$. Заметим, что при этом коэффициент вариации, т.е. отношение стандартного отклонения к условному среднему, с увеличением $(s - t)$ от нуля до бесконечности увеличивается монотонно от нуля до величины $\sigma_R/(2aR^*)^{1/2}$. Поэтому процесс (34) ведет себя вначале подобно случайному блужданию, «превращаясь» затем с течением времени в стационарный процесс. В частности, вероятность того, что $R(t)$ превысит некоторое заданное значение реальной процентной ставки $\overline{R}$, может быть сделана сколь угодно малой, если $\overline{R}$ выбирается достаточно большой. В отличие от этого, если бы $R(t)$ вела себя как случайное блуждание, тогда она превысила бы с вероятностью единица любое сколь угодно большое значение $\overline{R}$.

Подобная интерпретация может быть дана и в случае процесса $\pi(t)$. Следует заметить, что $\pi(t)$ ограничена снизу, принимая лишь неотрицательные значения, следовательно, пример является справедливым только для экономики, где руководство денежно-кредитной системой ограничивает свою инфляционную политику. Из соображений удобства примем, что $\sigma_{R\pi} = 0$. Предположим также, что динамика уровня потребительских цен описывается уравнением

$$\frac{dC(t)}{C} = \pi(t)\, dt + \sigma_C\, \pi^{1/2}\, dW_C(t)\ , \tag{38}$$

так что $\sigma_C(R,\pi) = \sigma_C\, \pi^{1/2}$. Из этого видно, что неопределенность мгновенного изменения уровня потребительских цен увеличивается с ростом предвидимой инфляции. Поэтому имеется значительно больше неопределенности, когда инвесторы предвидят высокий рост инфляции, чем в том случае, когда прогнозируется ее слабый рост. Отсюда также видно, что r принимает неотрицательные значения, если $\sigma_C \le 1$,

$$r(t) = R(t) + \pi(t)(1 - \sigma_C^2)\ . \tag{39}$$

Начиная с этого места, будем считать, что $\sigma_C \le 1$.

Наконец, предположим, что цены риска ϕ_R и ϕ_π являются увеличивающимися функциями соответственно R и π

$$\phi_R(R,\pi,t) = \phi_R R^{\,1/2} \quad \text{и} \quad \phi_\pi(R,\pi,t) = \phi_\pi \pi^{1/2}\ . \tag{40}$$

Из этого следует, что значения членов, отрегулированных риском,

$$X_R(R,\pi) = \phi_R \sigma_R R \quad \text{и} \quad X_\pi(R,\pi) = \phi_\pi \sigma_\pi \pi$$

имеют тот же самый порядок, что и члены дрейфа $\alpha_R = -a(R - R^*)$ и $\alpha_\pi = -c(\pi - \pi^*)$, для любых значений R и π соответственно. Таким образом, рисковое регулирование является ни незначительным, ни доминирующим.

Цены облигаций для этого примера находятся путем подстановки выражений (34), (35), (39) и (40) в равенство (31) и решения получающегося уравнения в частных производных, что приводит к выражению

$$P(\tau,R,\pi) = \left[\frac{\eta+\gamma\ e^{-\varepsilon\tau}}{\varepsilon} e^{\gamma\tau}\right]^{-u} \left[\frac{\mu+\lambda\ e^{-\theta\tau}}{\theta} e^{\lambda\tau}\right]^{-v} \times$$

$$\times \exp\left[-R\left(\frac{1-e^{-\varepsilon\tau}}{\eta+\gamma\ e^{-\varepsilon\tau}}\right) - \pi\left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\mu+\lambda\ e^{-\theta\tau}}\right)\left(1-\sigma_C^2\right)\right], \tag{41}$$

где $\tau = T - t$ является сроком до погашения, а другие обозначения, введенные для получения более простой формулы для цены, зависят от параметров уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon = [(a + \sigma_R\phi_R)^2 + 2\sigma_R^2]^{1/2} > 0,\\
&\gamma = -0{,}5\ (a + \sigma_R\phi_R) + 0{,}5\ \varepsilon > 0,\\
&\eta = \gamma + (a + \sigma_R\phi_R) > 0,\\
&u = 2aR^*/\sigma_R^2 > 0,\\
&\theta = [(c + \sigma_\pi\phi_\pi)^2 + 2\sigma_\pi^2(1 - \sigma_C^2)]^{1/2} > 0,\\
&\lambda = -0{,}5\ (c + \sigma_\pi\phi_\pi) + 0{,}5\ \theta > 0,\\
&\mu = \lambda + (c + \sigma_\pi\phi_\pi) > 0,\\
&v = 2c\pi^*/\sigma_\pi^2 > 0.
\end{aligned}$$

Цены облигаций являются функциями, уменьшающимися и выпуклыми по обеим переменным R и π. Мгновенная форвардная ставка принимает положительные значения

$$f(\tau,R,\pi) = -\frac{1}{P(\tau,R,\pi)} \frac{\partial P(\tau,R,\pi)}{\partial \tau} =$$

$$= aR^*\left(\frac{1-e^{-\varepsilon\tau}}{\eta+\gamma\ e^{-\varepsilon\tau}}\right) + R\left(\frac{\varepsilon^2 e^{-\varepsilon\tau}}{\left(\eta+\gamma\ e^{-\varepsilon\tau}\right)}\right) +$$

$$+ c\pi^*\left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\mu+\lambda\, e^{-\theta\tau}}\right) + \pi(1-\sigma_R^2)\frac{\theta^2 e^{-\theta\tau}}{\left(\mu+\lambda\, e^{-\theta\tau}\right)} \;>\; 0\,. \tag{42}$$

Форвардные процентные ставки стремятся к следующему предельному значению при $\tau \to \infty$:

$$f(\infty,R,\pi) = aR^*/\eta + c\pi^*/\mu\,.$$

Предельные форвардные ставки $f(\infty,R,\pi)$ в зависимости от значений параметров могут быть или больше, чем $E[r(\infty)] = R^* + (1-\sigma_R^2)\,\pi^*$, или меньше этого значения; они равны $E[r(\infty)]$ только тогда, когда

$$\phi_R = -\frac{\sigma_R}{2a} \quad \text{и} \quad \phi_\pi = \frac{c\sigma_C^2}{\left(1-\sigma_C^2\right)\sigma_\pi} - \frac{\sigma_\pi\left(1-\sigma_C^2\right)^2}{2c}\,.$$

Кривая доходности для этого примера находится подстановкой выражения (41) в формулу, определяющую ставку доходности $y(\tau,R,\pi)$ (например, в (3) раздела 1.2), что дает следующий результат

$$y(\tau,R,\pi) = u\left[\gamma + \frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{\eta+\gamma\, e^{-\varepsilon\tau}}{\varepsilon}\right)\right] + \frac{R}{\tau}\left[\frac{1-e^{-\varepsilon\tau}}{\eta+\gamma\, e^{-\varepsilon\tau}}\right] +$$

$$+ v\left[\lambda + \frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{\mu+\lambda\, e^{-\theta\tau}}{\theta}\right)\right] + \frac{\pi}{\tau}\left[\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\mu+\lambda\, e^{-\theta\tau}}\right]\left(1-\sigma_C^2\right) \;>\; 0\,. \tag{43}$$

Легко проверить, что

$$y(\infty,R,\pi) = u\gamma + v\lambda \equiv y^* > 0 \tag{44}$$

и

$$y(0,R,\pi) = R + \pi(1-\sigma_C^2) = r\,. \tag{45}$$

Как и в примере детерминированного случая (см. выражение (35) раздела 1.2), кривая доходности (43) в стохастическом случае принимает различные формы: увеличивается, уменьшается или имеет горб. Это можно видеть, исследуя производную

$$\frac{\partial\, y(\tau,R,\pi)}{\partial\,\tau} = \frac{f(\tau,r,\pi) - y(\tau,r,\pi)}{\tau}\,. \tag{46}$$

Более того, как и в детерминированном случае, для всех $\tau > 0$

$$\frac{\partial y}{\partial R} > 0\ , \frac{\partial y}{\partial R^*} > 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \pi} > 0\ , \frac{\partial y}{\partial \pi^*} > 0.$$

При этом опять увеличение по R и π не гарантирует, что когда $\partial y/\partial R \neq \partial y/\partial \pi$, доходность будет увеличиваться при разных темпах роста R и π.

Из-за сепарабельности процессов R и π (что означает некоррелированность R и π и взаимную независимость их дрейфа и дисперсии), которые предполагались соотношениями (34) и (35), имеется две составляющих кривых доходности, одна для R и другая для π, так же как и в детерминированном случае. Опять имеется две временных структуры. Первая является временной структурой реальной ставки возмещения капитала, а вторая – временной структурой возможных издержек при хранении денег (или возмещения от хранения материальных товаров).

3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

3.1 АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как следует из предыдущих разделов, для описания процессов изменения различного рода процентных ставок в основном используются стохастические дифференциальные уравнения. Решения таких уравнений оказываются марковскими диффузионными процессами. В тех случаях, когда модели этих процессов являются линейными и однородными по времени, то есть дрейф и волатильность явно не зависят от времени, наблюдения таких процессов в дискретные моменты времени порождают временные ряды, которые описываются авторегрессионными моделями первого порядка. В настоящем разделе рассмотрены вопросы построения таких авторегрессионных моделей. Поскольку эта проблема представляет интерес не только для анализа процентных ставок, мы будем вести речь о финансовых данных вообще, включая и процентные ставки.

Наблюдаемые временные ряды финансовых данных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ могут рассматриваться как выборочные траектории случайных процессов. Однако все реальные процессы в природе и обществе изменяются в непрерывном времени, какими бы математическими моделями они ну были представлены. Процессы, описывающие конъюнктуру финансового рынка, не являются исключением. Поэтому полезно установить наиболее точное соответствие между математическими моделями временных рядов (как процессов дискретного времени) и стохастическими процессами непрерывного времени, которые их порождают. Наиболее популярными математическими моделями стохастических процессов в непрерывном времени являются стохастические дифференциальные уравнения, которые могут быть записаны как

$$dx = \mu(x,t)\,dt + \theta(x,t)\,dW(t)\,,$$

где $\mu(x,t)$ и $\theta(x,t)$ – непрерывно дифференцируемые детерминированные функциями своих аргументов; $W(t)$ – стандартный винеровский процесс. В этих условиях стохастический процесс $x(t)$ является марковским процессом. Для наших целей достаточно рассмотреть наиболее простой случай линейных стохастических дифференциальных уравнений, когда

$$dx = (a(t)\,x + b(t))\,dt + c(t)\,dW(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Заметим, что стохастический процесс $x(t)$ в этих уравнениях может быть как скалярным, так и векторным процессом. Поэтому для рассмотрения мы выберем более общий случай векторного процесса $x(t)$. В этом случае $a(t)$ и $c(t)$ являются матричными функциями соответствующих размеров, а $b(t)$ – вектор такой же размерности, как и $x(t)$. Решение уравнения для этого случая может быть записано в виде:

$$x(t) = U(t,s)x(s) + \int_s^t U(t,v)b(v)dv + \xi(s,t) \tag{2}$$

где $x(s)$ – заданный начальный вектор процесса в момент времени s ; $U(t,s)$ – фундаментальная матрица решений (ФМР) однородной детерминированной системы

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x(t)$$

с начальным условием $x(s)$ в момент времени s , $\xi(s,t)$ – случайный вектор с нулевым средним и корреляционной матрицей

$$\int_s^t U(t,v)c(v)c^T(v)U^T(t,v)dv\,.$$

Удобно преобразовать это решение к другому более удобному виду. Для этого введем некоторые новые обозначения. Поскольку корреляционная матрица является положительно определенной матрицей, можно ввести другую положительно определенную матрицу $\sigma(s,t)$ при помощи равенства

$$\sigma^2(s,t) = \int_s^t U(t,v)c(v)c^T(v)U^T(t,v)dv\,.$$

Обозначим также

$$\mathrm{z}(t) = \int_u^t U(t,v)b(v)dv\,, \quad Z(t) = x(t) - \mathrm{z}(t)\,. \tag{3}$$

Так как матрица $U(t,s)$ имеет свойство факторизации $U(t,s) = U(t,v)U(v,s)$ для любых t, s и v, можно написать для любого произвольного u (смысл параметра u обсудим ниже)

$$\int_s^t U(t,v)b(v)dv = \mathrm{z}(t) - U(t,s)\,z(s)\,.$$

Используя новые обозначения, решение (2) системы (1) можно представить в виде

$$Z(t) = U(t,s)\, Z(s) + \sigma(s,t)\, V(t)\,, \tag{4}$$

где $V(t)$ – нормально распределенный вектор, который имеет следующие математические ожидания:

$$E\{V(t)\} = 0,\ E\{V(t)\, V^T(t)\} = \boldsymbol{I}\,, E\{V(t)\, V^T(s)\} = 0\,,\ \text{для всех}\ \ t \neq s\,,$$

а $\boldsymbol{I}$ является единичной матрицей.

Решение уравнения (2) в виде (4) похоже на многомерную авторегрессию с переменными коэффициентами. Сделаем это подобие более очевидным. Для этого рассмотрим частный случай матрицы с постоянными коэффициентами в уравнении (2). То есть будем считать, что $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ не зависят от времени t. В этом случае фундаментальная матрица решений является фкнкцией только от одной переменной, $U(t,s) = U(t-s)$, что влечет $\sigma(s,t) = \sigma(\,t-s)$.

Предположим, что значения процесса, определяемого уравнением (2), доступны наблюдению только в дискретные моменты времени из некоторого подмножества. Пусть этим подмножеством моментов наблюдения является $\{t_i \mid i = 1, 2, \ldots\,;\ t_{i+1} - t_i = h$ для любых $i\}$. Будем обозначать $Z(t_k) = Z_k$, $V(t_k) = V_k$. Тогда равенство (4) может быть переписано в виде

$$Z_k = U(h)\, Z_{k-1} + \sigma(h)\, V_k\,, \tag{5}$$

то есть в виде многомерной (векторной) авторегрессии. Заметим, что когда матрица $U(h)$ является невырожденной и $E\{V_k\} = 0$ для любых k, из выражения (5) следует, что $E\{Z_k\} = 0$. Возвращаясь к первоначальным обозначениям $x(t) = z(t) + Z(t)$ и используя обозначение $x(t_k) = X_k$, мы видим, что это эквивалентно равенству

$$E\{Z_k\} = E\{X_k\} - z(t_k) = 0 \quad \text{или} \quad E\{X_k\} = z(t_k)\,.$$

Если матрица $\int\limits_0^\infty U(t)U^T(t)dt$ существует, тогда стохастический процесс $\{Z_k\}$ является стационарным. В этом случае уместно рассмотреть смысл функции $z(t)$, определяемой равенством (3). Как видно, интеграл $z(t)$ при нижнем пределе интегрирования $u = -\infty$ дает среднее значение стационарного процесса в виде

$$z(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} U(t-v)bdv = \int\limits_0^\infty U(s)bds = \mu$$

В других случаях нижний предел интегрирования u может рассматриваться как начальный момент развития процесса, тогда функция $z(t)$ может рассматриваться, как ожидаемое значение процесса при установлении его к среднему значению, которым может быть тренд стохастического процесса.

Таким образом, для стационарного процесса соотношение (5) можно переписать в первоначальных обозначениях как

$$X_k = \mu + U(h)(X_{k-1} - \mu) + \sigma(h)\, V_k\,. \tag{6}$$

Когда размерность модели n равна 1, все установленные выше соотношения становятся скалярными, так же как и все члены уравнений авторегрессионных моделей (5) и (6).

Пример 1. В частном случае модели Васичека, рассмотренном в разделе 2.1, краткосрочная процентная ставка $r(t)$ следует однородному по времени процессу Орнштейна – Уленбека

$$dr = \alpha(\gamma - r)\, dt + \rho\, W(t).$$

Для этого процесса $U(t,s) = \exp\{-\alpha\,(t-s)\}$, $t \ge s$, так что решение стохастического уравнения в форме (2) выражается в виде

$$r(t) = r(s)\, e^{-\alpha\,(t-s)} + \gamma\,(1 - e^{-\alpha\,(t-s)}) + \xi(s,\, t)\,,$$

где случайная величина $\xi(s,\ t)$ имеет нулевое среднее и дисперсию $\dfrac{\rho^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right)$. Таким образом, определяя множество моментов наблюдения как $\{t_i \mid i = 1, 2, \dots;\ t_{i+1} - t_i = h$ для любых $i\}$ и $R_k = r(t_k)$, получаем авторегрессионную модель (6) для процесса краткосрочной процентной ставки в виде

$$R_k = \mu + U(h)(R_{k-1} - \mu) + \sigma\,(h)\, V_k\,,$$

где $\mu = \gamma$, $U(h) = \exp\{-\alpha h\}$, $\sigma\,(h) = \rho\sqrt{\dfrac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha h}\right)}$ и $\{V_k\}$ - независимые стандартные нормально распределенные случайные величины. Мгновенная ставка доходности в этом частном случае является линейно связанной с краткосрочной процентной ставкой соотношением (см. формулу (29) раздела 2.1)

$$y(t,T) = y(\infty) + \big(r(t) - y(\infty)\big)b(\tau) + \frac{\rho^2\tau}{4\alpha}b^2(\tau) \quad , \quad \tau = T - t \ge 0,$$

где для краткости обозначено $b(\tau) = (\alpha\tau)^{-1}(1 - e^{-\alpha\tau})$. Используя это соотношение и правило дифференцирования Ито, мы получим, что ставка доходности с фиксированным сроком до погашения τ, как и краткосрочная процентная ставка, следует процессу Орнштейна – Уленбека

$$dy = \alpha\,(u(\tau) - y)\,dt + v(\tau)\,dW(t)\,,$$

где α - параметр, совпадающий с аналогичным параметром уравнения краткосрочной процентной ставки, а

$$u(\tau) = y(\infty) + (\gamma - y(\infty))\,b(\tau) + \frac{\rho^2\tau}{4\alpha} b^2(\tau)\quad,$$

и

$$v(\tau) = \rho\, b(\tau)\,.$$

Так что решение (2) уравнения для ставки доходности получается аналогично решению для краткосрочной процентной ставки

$$y(t,\, t+\tau) = y(s,s+\tau)\,e^{-\alpha\,(t-s)} + u(\tau)\;(1 - e^{-\alpha\,(t-s)}) + \xi(s,\,t)\,,$$

где для этого уравнения случайная величина $\xi(s,\ t)$ имеет нулевое среднее и дисперсию $\dfrac{\rho^2 b^2(\tau)}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-s)}\right)$. Наконец, для того же множества моментов наблюдений, что и для краткосрочной процентной ставки, с учетом обозначения $Y_k = y(t_k,\ t_k+\tau)$ получаем авторегрессионную модель (6) процесса ставки доходности для фиксированного срока до погашения τ в виде

$$Y_k = \mu + U(h)(Y_{k-1} - \mu) + \sigma(h)\,V_k\,,$$

где $\mu = u(\tau)$, $U(h) = \exp\{-\alpha h\}$, $\sigma(h) = \rho\, b(\tau)\sqrt{\dfrac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha h}\right)}$ и $\{V_k\}$ - независимые стандартные нормально распределенные случайные величины.

До сих пор мы говорили о том, как получить стохастическую модель для наблюдений стохастического процесса в дискретные моменты времени, если задано стохастическое дифференциальное уравнение. Но иногда представляет интерес и обратная задача: построить стохастическое дифференциальное уравнение по наблюдаемому временному ряду, если в качестве его математической модели выбрана авторегрессионная модель. Для возникновения такой задачи имеется два обстоятельства. Во-первых, чтобы получить общие адекватные математические результаты, удобнее использовать уравнение для непрерывного времени, поскольку любой процесс, как мы отмечали выше, всегда развивается в непрерывном времени и применение дискретного времени связано только с тем, что моменты наблюдений составляют конечное (или счетное) множество. Во-вторых, решения уравнений в непрерывном времени часто имеют более простую и изящную структуру и более удобны при теоретическом анализе. При построении стохастического дифференциального уравнения используются те же самые соотношения, какие мы рассматривали выше, но в обратном порядке. Приведем пример.

Пример 2. Рассмотрим широко известную инвестиционную модель Уилки (Wilkie, 1986), которая описывает стохастическое поведение процесса инфляции. Согласно этой модели индексы потребительских цен Великобритании (U. K. Retail Prices Index), обозначаемые как $Q(t)$ и основанные на ежегодных ($h = 1$) данных за период с 1919 г. по 1982 г., образуют временной ряд темпа инфляции $I(t) = \ln (Q(t)/Q(t\text{-}1))$ за год $(t\text{-}1, t)$

$$I(t) = 0.05 + 0.6\times(I(t-1) - 0.05) + 0.05\times V(t) \tag{7}$$

где $V(t)$ являются последовательностью независимых, одинаково распределенных нормальных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, то есть $E\{V(t)\} = 0$, $E\{V^2(t)\} = 1$ и $E\{V(t)V(s)\} = 0 \;\; t \neq s$. Для этого случая

$$U(h) = e^{-ah} = 0.6,\;\; z(t) = \mu = b/a = 0.05\,,$$
$$\sigma(h) = c\sqrt{\left(1-e^{-2ah}\right)/2a} = 0.05\,,\; h = 1.$$

Следовательно, стохастическое дифференциальное уравнение (1) которое соответствует этой авторегрессионной модели имеет вид

$$dx = (-0.511\,x + 0.0255)\,dt + 0.0632\,dW(t)$$

Другая инвестиционная модель Уилки (Wilkie, 1995) является двумерной. В этой авторегрессионной модели к темпу инфляции потребительских цен $I(t)$ добавляется темп инфляции заработной платы (the force of the wage inflation) $J(t)$ за год $(t-1, t)$. Тогда для темпов $\tilde{I}(t) = I(t) - \mu_I$ и $\tilde{J}(t) = J(t) - \mu_J$ авторегрессионная модель, полученная Уилки, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{I}(t) \\ \tilde{J}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1817 & 0.5927 \\ 0.1724 & 0.5618 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{I}(t-1) \\ \tilde{J}(t-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0382 & 0.0142 \\ 0.0142 & 0.0303 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} \tag{8}$$

где $\mu_I = 0.0359$ и $\mu_J = 0.0509$, а $V_1(t)$, $V_2(t)$ являются независимыми одинаково распределенными стандартными нормальными случайными величинами, т.е. $E\{V_k(t)\} = 0$, $E\{V_k{}^2(t)\} = 1$ для $k = 1{,}2$ и $E\{V_1(t)V_2(t)\} = 0$ для любых t . В этом случае фундаментальная матрица решений имеет вид

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0.2445\times e^{\lambda t} + 9.5173\times e^{\mu t} & 0.7970\times\left(e^{\lambda t} - e^{\mu t}\right) \\ 0.2318\times\left(e^{\lambda t} - e^{\mu t}\right) & 0.2445\times e^{\mu t} + 9.5173\times e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

где $\lambda = -0.2962$, $\mu = -20.6248$.

Стохастическое дифференциальное уравнение (1), которое соответствует двумерной авторегрессионной модели (8), принимает вид

$$\begin{pmatrix} d\tilde{I} \\ d\tilde{J} \end{pmatrix} = \left(a \begin{pmatrix} \tilde{I}(t) \\ \tilde{J}(t) \end{pmatrix} + b \right) dt + c \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix},$$

где

$$a = \begin{pmatrix} -3.3812 & 3.2547 \\ 0.9465 & -17.5398 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.05335 \\ 0.00381 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0.01495 & 0.02038 \\ 0.00185 & 0.00252 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы видим, что использование наблюдений процесса $x(t)$, который является решением стохастического дифференциального уравнения в дискретные моменты времени, приводит к авторегрессионной модели первого порядка. Такая модель порождает марковский процесс, что утверждает теорема Дуба. Другая теорема Дуба устанавливает, что скалярный стационарный случайный процесс является марковским, если и только если его корреляционная функция является экспоненциальной. Это означает, что для временных рядов, которые порождаются стохастическим дифференциальным уравнением, мы имеем

$$C(u) = Cov\left\{X_k X_{k+u}\right\} / \sqrt{Var\left\{X_k\right\} Var\left\{X_{k+u}\right\}} = \exp\{-\rho u\}, \quad u \geq 0, \qquad (9)$$

где положительный параметр ρ определяется соответствующим образом. Это свойство может быть использовано для анализа качества аппроксимации финансовых временных рядов моделями авторегрессии.

Часто при анализе временных рядов используются стационарные модели (то есть модели порождающие стационарные процессы), в которых коэффициенты модели являются постоянными величинами. Такие модели генерируют стационарные (второго порядка) временные ряды X_k, имеющие следующие свойства:

$$E\{X_k^2\} < \infty, \ E\{X_k\} = m, \ E\{X_k X_{k+u}\} = f(|u|)$$

для всех $k, u = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Заметим, что свойство стационарности всегда определяется для неограниченного множества индексов и используется для теоретического анализа, в то время как наблюдаемые на практике временные ряды составляют всегда ограниченное выборочное множество. Поэтому при практическом использовании свойства стационарности должны применяться с осторожностью или должны быть модифицированы. На практике ситуация становится более сложной, так как к стационарному временному ряду может добавляться систематическая или сезонная составляющие. Обычно первым шагом в анализе реального временного ряда является его общее рассмотрение с целью необходимой декомпозиции временного ряда на указанные составляющие. Это предусматривает классическая декомпозиция, включающая три компоненты:

$$m_k + s_k + X_k ,$$

медленно изменяющуюся компоненту (компоненту тренда) m_k, сезонную компоненту s_k и случайную компоненту X_k. Компонента тренда может включать как систематическую детерминированную компоненту, так и медленно изменяющуюся случайную компоненту стационарного временного ряда. Если период наблюдения меньше, чем цикл сезонности, сезонная компонента s_k может также включаться в тренд m_k. Таким образом, даже в отсутствие систематической и сезонной компонент компонента тренда m_k может быть определена как медленно изменяющаяся случайная компонента. В этом случае декомпозиция является довольно условной. Позже при статистическом анализе реальных временных рядов финансовых данных мы рассмотрим такую декомпозицию. Случайная компонента X_k обычно представляется как реализация стационарного процесса и описывается как временной ряд, порождаемый авторегрессионной моделью.

Часто используемой моделью при анализе реальных временных рядов является модель авторегрессии-скользящего среднего (ARMA-модель). ARMA(p,q) - модель авторегрессии-скользящего среднего порядка (p,q) порождает стационарный временной ряд X_k посредством следующего стохастического разностного уравнения:

$$X_k = \sum_{i=1}^{p} a_i X_{k-i} + \sum_{j=0}^{q} b_j V_{k-j} , \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \tag{10}$$

где a_i и b_j – константы, а V_k – процесс стандартного белого шума, $E\{V_k\} = 0$, $E\{V_k^2\} = 1$, $E\{V_k V_{k+u}\} = 0$, $u \neq 0$. Заметим, что если некоторый временной ряд Y_k определяется как линейное преобразование другого временного ряда X_k, который является ARMA-процессом, тогда Y_k оказывается тоже ARMA-процессом. Например, если $Y_k = \sum_{t=0}^{r} c_t X_{k-t}$, где X_k – это процесс ARMA(p,q), порождаемым уравнением (10), тогда временной ряд Y_k будет процессом ARMA(p,q+r)

$$Y_k = \sum_{i=1}^{p} a_i Y_{k-i} + \sum_{j=0}^{q+r} d_j V_{k-j} , \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{11}$$

где коэффициенты d_j достаточно просто определяются через b_j и c_j:

$$d_j = \sum_{l=0}^{r} c_l b_{j-l}^* , \quad b_j^* = \begin{cases} b_j & 0 \le j \le q \\ 0 & j < 0; j > q \end{cases}$$

Это важно, например, при анализе доходности до погашения. Доходность до погашения является мерой средней доходности, с которой облигация зарабатывает проценты, если ее купить в некоторый момент времени и владеть ею до даты погашения. Если лежащая в основе краткосрочная процентная ставка X_k порождается процессом ARMA(1,0) (т.е. процессом AR(1)), как часто предполагается, тогда доходность до погашения Y_k свободной от неуплат дисконтированной облигации, погашаемой через время T, порождается процессом ARMA(1,T).

Как мы увидим позже, корреляционные свойства временных рядов являются очень важными при предсказании их значений в будущие моменты времени по наблюдениям из прошлого. Поэтому приведем некоторые сведения по вопросу вычисления корреляционных функций для процессов ARMA(p,q). Мы представим здесь наиболее простые случаи, необходимые нам. Процесс AR(1) (т.е. процесс ARMA(1,0))

$$X_k = aX_{k-1} + \sigma V_k$$

имеет корреляционную функцию вида

$$C(u) = E\{X_k X_{k+u}\}/\sqrt{E\left\{X_k^2\right\}E\left\{X_{k+u}^2\right\}} = a^u,\ u > 0 .$$

Для процесса AR(2)

$$X_k = a_1 X_{k-1} + a_2 X_{k-2} + \sigma V_k$$

корреляционная функция приобретает вид

$$C(u) = \frac{\left(g_2^2-1\right)g_1^{1-u} - \left(g_1^2-1\right)g_2^{1-u}}{\left(g_2^2-1\right)g_1 - \left(g_1^2-1\right)g_2}, \qquad u > 0 . \tag{12}$$

где g_1 и g_2 – различные корни уравнения $1 - a_1 g - a_2 g^2 = 0$ (для стационарного временного ряда эти корни $|g_k| > 1$, $k = 1, 2$). Когда корни являются комплексно сопряженными $g_1 = fe^{-i\varphi}$ и $g_2 = fe^{i\varphi}$, тогда это выражение удобнее представить в виде

$$C(u) = f^{-u}\frac{\sin(u\varphi+\psi)}{\sin\psi}, \qquad \tan\psi = \frac{f^2+1}{f^2-1}\tan\varphi . \tag{13}$$

Таким образом, для всех временных рядов, которые порождаются моделями AR(1) с положительным коэффициентом $a < 1$, корреляционные функции являются положительными монотонно уменьшающимися функциями. Это следует также из свойств стохастического дифференциального уравнения, которое порождает марковский процесс (см. (9)). Наоборот, если корреляционная функция некоторого временного ряда принимает отрицательные значения, то такой временной ряд не может быть порожденным моделью AR(1). Это означает также, что процесс, который представляется таким временным рядом, не может порождаться стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка.

3.2 МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Большинство стохастических моделей, описывающих динамику финансовых данных (особенно доходностей и других процентных ставок), основаны на стохастических дифференциальных уравнениях для процессов с независимыми приращениями, порождающих марковские процессы. В случае, когда такие процессы стационарны, а их наблюдения производятся в дискретные моменты времени, эти уравнения приводят к модели авторегрессии первого порядка. В свою очередь, марковские процессы обладают только положительной корреляцией, а, согласно известной теореме Дуба, их корреляционная функция является экспоненциальной.

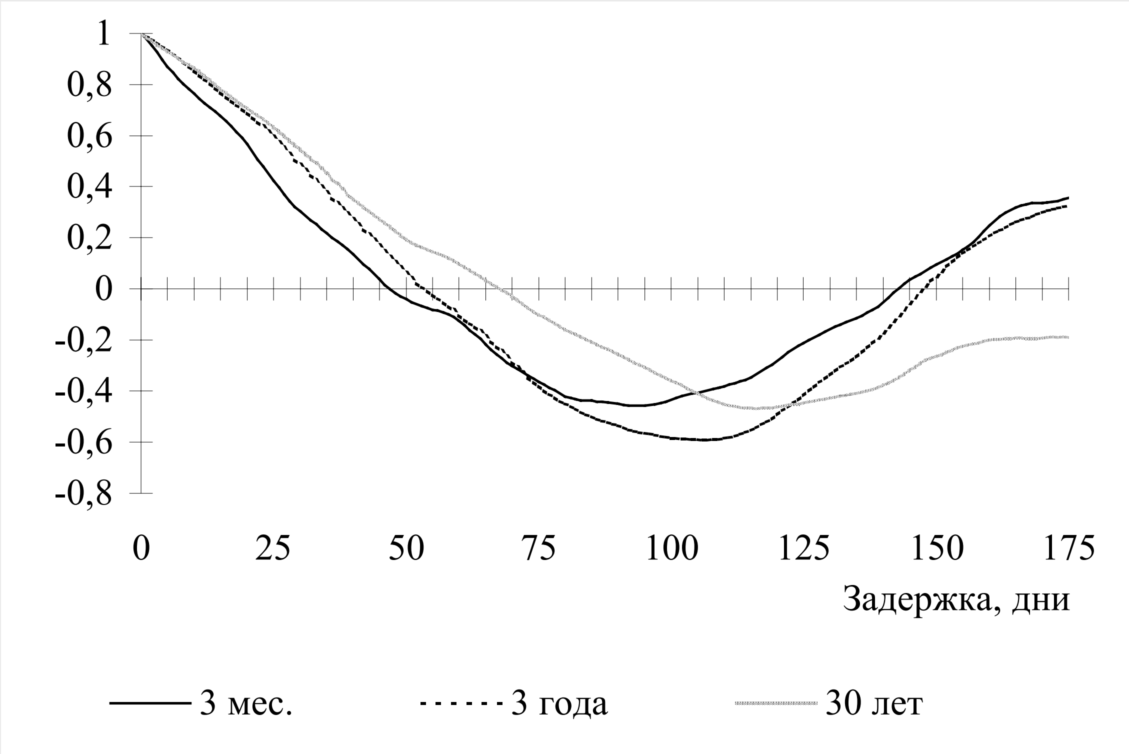


Рис. 1 Корреляционные функции для отклонения доходностей от тренда ценных бумаг Казначейства США (январь 1991 - январь 1996)

Вместе с тем, анализ реальных финансовых временных рядов показывает, что их корреляционные функции принимают не только положительные значения, но также и отрицательные, и напоминают не экспоненту, а скорее затухающую косинусоиду. Это можно видеть на многочисленных примерах. Один из них приводится на рис. 1.

Такое поведение корреляционной функции говорит о том, что не всегда математические модели, приводящие к марковским процессам, являются адекватными реальным финансовым временным рядам. В связи с этим представляет интерес построить такие математические модели, которые адекватно отражали бы свойства реальных финансовых временных рядов.

В настоящем разделе для описания финансовых процессов используются стохастические дифференциальные уравнения любых порядков, что приводит к разностным уравнениям для финансовых временных рядов с зависимыми приращениями. Такие временные ряды обладают широким спектром корреляционных функций и могут служить более точными математическими моделями реальных финансовых временных рядов.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Анализ реальных финансовых рядов показывает, что стохастические модели динамики процессов процентных ставок в форме стохастических дифференциальных уравнений

$$dy = a(y,t)\,dt + \sigma(y,t)\,dW(t) \tag{1}$$

для процессов с независимыми приращениями не всегда являются подходящими, так как решениями таких уравнений являются марковские процессы, в то время как реальные финансовые данные часто не являются такими процессами. Основанием к такому заключению является тот факт, что , как мы убедились, корреляционные функции реальных финансовых рядов не являются экспоненциальными функциями, что должно иметь место для марковских процессов. Откуда, кстати, следует, что марковские процессы обладают только положительной корреляцией. Вместе с тем корреляционные функции реальных финансовых данных могут принимать и отрицательные значения и часто по виду напоминают затухающую косинусоиду. Случайные процессы с такими свойствами могут быть получены как решения стохастических дифференциальных уравнений более высоких порядков, чем первый.

Уравнение (1) определяет случайный процесс, который является непрерывным, но не имеющим производных (в среднеквадратическом смысле). Рассмотрим линейное стохастическое дифференциальное уравнение n-го порядка с непрерывными детерминированными коэффициентами относительно случайного процесса $y(t)$, $t \geq s$, который является непрерывным и имеет производные до $(n-1)$-го порядка включительно, но не имеет n-й производной. Запишем это уравнение в стохастических дифференциалах в виде

$$dy^{(n-1)}(t) - a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)dt - \ldots - a_0(t)y(t)dt = \sigma(t)dW(t), \ t \geq s. \tag{2}$$

Так что непрерывные производные $y^{(k)}(t)$ для $0 \leq k \leq (n-2)$ имеют стохастические дифференциалы $d\,y^{(k)}(t) = y^{(k+1)}(t)dt$, а $(n-1)$-я производная имеет стохастический дифференциал

$$dy^{(n-1)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t)dt + \ldots + a_0(t)y(t)dt + \sigma(t)dW(t), \ t \geq s. \tag{3}$$

Заметим, что при $\sigma(t) \equiv 0$ уравнение (2) становится однородным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно детерминированной функции, имеющей n производных:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \ldots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = 0. \tag{4}$$

Общее решение уравнения (4) можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} U_k(t,s)y^{(k)}(s), \ t \geq s, \tag{5}$$

через начальные условия $\big(y(s) = y^{(0)}(s), y^{(1)}(s), \ldots, y^{(n-1)}(s)\big)$ и частные решения $U_k(t,s)$, соответствующие конкретному набору начальных условий: $y^{(k)}(s) = 1$, $y^{(j)}(s) = 0$ для всех $j \neq k$. Предположим теперь, что $\{y^{(k)}(s), 0 \leq k < n\}$ являются случайными величинами. Тогда функция, определяемая формулой (5), и в этом случае будет иметь непрерывные в среднеквадратическом смысле производные $y^{(k)}(t)$ до порядка $(n-1)$ включительно и является единственным решением однородного стохастического уравнения (2) с начальными условиями $\{y^{(k)}(s), 0 \leq k < n\}$.

Решение стохастического дифференциального уравнения (2) с нулевыми начальными условиями задается формулой

$$y(t) = \int_s^t U(t,s)\sigma(s)dW(s), \qquad t \geq s, \tag{6}$$

где при фиксированном s функция $U(t,s)$ переменного t, $t \geq s$, является решением однородного дифференциального уравнения (4) с начальными условиями

$$U(s,s) = 0,\ U^{(1)}(s,s) = 0,\ \ldots,\ U^{(n-2)}(s,s) = 0,\ U^{(n-1)}(s,s) = 1.$$

Таким образом, если взять решение $y(t)$, $t \geq s$, уравнения (2) с нулевыми начальными условиями $\{ y^{(k)}(s) = 0,\ 0 \leq k < n\}$ и прибавить к нему решение (5) однородного уравнения (2), то полученная сумма даст решение уравнения (2) с начальными условиями $\{ y^{(k)}(s),\ 0 \leq k < n\}$.

Для анализа полученного решения и нахождения его в явном виде описанную структуру решения уравнения (2) удобнее записать следующим образом. Введем обозначения:

$$y_k(t) = \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

Тогда уравнение (2) может быть записано в эквивалентной форме как система n дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в дифференциалах, то есть

$$\begin{aligned} dy_1 &= y_2 dt \\ dy_2 &= y_3 dt \\ &\dots \\ dy_n &= a_0(t) y_1 dt + a_1(t) y_2 dt + \dots + a_{n-1}(t) y_n dt + \sigma(t) dW(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Решение системы уравнений удобно представить в матричной форме. Для этого запишем (8) в виде.

$$\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \dots \\ dy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \sigma(t) \end{pmatrix} dW(t) \tag{9}$$

Вводя векторы $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{\sigma}$, а также матрицу $\boldsymbol{A}$, удобно записать эту систему короче

$$\boldsymbol{dY = A\,Y\,dt + \sigma\,dW(t)}. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \sigma(t) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Решение этой системы в нашем случае удобно записывать в интегральной форме, которая с учетом начальных условий

$$\{y_k(s) = y^{(k-1)}(s)\ ,\ 1 \le k \le n\} \tag{12}$$

в момент времени s имеет вид

$$\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{U}(t,s)\ \boldsymbol{Y}(s) + \int_s^t U(t,\tau)\sigma dW(\tau)\ . \tag{13}$$

Здесь $\boldsymbol{U}(t,s)$ является фундаментальной матрицей решений однородной системы дифференциальных уравнений ($\boldsymbol{Y}'$ обозначает производную вектора $\boldsymbol{y}$ по переменной t)

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\ , \tag{14}$$

то есть матрицей, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial U(t,s)}{\partial t} = \boldsymbol{A}(t)\ \boldsymbol{U}(t,s) \tag{15}$$

с начальным условием : $\boldsymbol{U}(s,s) = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I}$ - единичная матрица соответствующего размера.

УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Основной проблемой при получении решения (13) в конкретной задаче является нахождение матрицы $U(t,s)$. Рассмотрим наиболее простой случай, когда коэффициенты в уравнении (2) являются константами, то есть $a_i(t) = a_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. На практике часто корни характеристического полинома уравнения (2)

$$\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0 = 0 \tag{16}$$

(или, что то же самое, собственные числа матрицы $\boldsymbol{A}$) являются различными. В этом случае матрица $U(t,s)$ находится достаточно просто. Во-первых, поскольку коэффициенты уравнения (2) являются константами, то $U(t,s) = U(t-s)$, то есть матрица зависит не от абсолютных значений своих переменных, а от их разности, и поэтому является функцией одной переменной. Во-вторых, матрица $U(t,s)$ явно выражается через корни уравнения (16) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и имеет вид

$$U(t-s) = Be^{\Lambda(t-s)}B^{-1} \tag{17}$$

где

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Таким образом, для рассматриваемого случая постоянных коэффициентов уравнения (2) (что обеспечивает стационарность процессу $y(t)$) и различных корней характеристического уравнения (16) выражение (13) вместе с (17) и (18) дают решение системы (9) (или (10)) в виде вектора $\boldsymbol{Y}$, первой компонентой которого является решение рассматриваемого уравнения (2), то есть искомый процесс.

РАЗНОСТНАЯ ВЕРСИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Однако выражение (13) очень редко может быть принято в качестве модели реального случайного процесса, поскольку некоторые компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$, представляют собой производные искомого процесса, на практике обычно не являются наблюдаемыми и не могут быть использованы как начальные условия для практических вычислений решения. Чтобы получить реализуемую модель процесса, соответствующего стохастическому дифференциальному уравнению (2), необходимо избавиться от этих компонент вектора $\boldsymbol{Y}$. Для этого построим разностную модель, которой удовлетворяет данный процесс. Предположим, что процесс $y(t)$ наблюдается только в моменты времени, принимающие дискретные значения: $t \in \{\, kh\,,\ k = 0, 1, 2, \dots \}$. Выпишем с помощью выражения (13) явные выражения значений процесса (первой компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$) в моменты времени $(m+k)h$, $m = 1, 2, \dots, n$, считая начальным момент времени kh:

$$\begin{aligned} &y((m+k)h) = Y_1((m+k)h) = \\ &= U_{11}(mh)Y_1(kh) + \sum_{j=2}^{n} U_{1j}(mh)Y_j(kh) + \int_{kh}^{(k+m)h} U_{1n}\big((k+m)h - \tau\big)\sigma dW(\tau), \qquad (19) \\ &m = 1, 2, \dots, n\,. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в этом выражении является комбинацией компонент, являющихся производными. Именно эти компоненты и необходимо исключить, чтобы получить реализуемую модель рассматриваемого процесса. Для этого первые $n-1$ выражений (19) (для $m = 1, 2, \dots, n-1$) можно рассматривать как систему уравнений относительно исключаемых $Y_j(kh)$, $j = 2, \dots, n$. Находя их из этой системы и подставляя в выражение (19) для $m = n$, получим разностное уравнение, которое может рассматриваться как модель процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением (2), определяющая значения процесса в последовательные дискретные моменты времени через временные интервалы длительностью h. Представим это в математической форме. Запишем первые $n-1$ уравнений (19) в виде

$$\begin{pmatrix} U_{12}(h) & U_{13}(h) & \dots & U_{1n}(h) \\ U_{12}(2h) & U_{13}(2h) & \dots & U_{1n}(2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{12}((n-1)h) & U_{13}((n-1)h) & \dots & U_{1n}((n-1)h) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y_2(kh) \\ Y_3(kh) \\ \dots \\ Y_n(kh) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1((k+1)h) - U_{11}(h) Y_1(kh) \\ Y_1((k+2)h) - U_{11}(2h) Y_1(kh) \\ \dots \\ Y_1((k+n-1)h) - U_{11}((n-1)h) Y_1(kh) \end{pmatrix} - \tag{20}$$

$$-\sigma \begin{pmatrix} \int\limits_{kh}^{(k+1)h} U_{1n}((k+1)h-\tau) dW(\tau) \\ \int\limits_{kh}^{(k+2)h} U_{1n}((k+2)h-\tau) dW(\tau) \\ \dots \\ \int\limits_{kh}^{(k+n-1)h} U_{1n}((k+n-1)h-\tau) dW(\tau) \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что компоненты вектора $\boldsymbol{Y}$, которые необходимо исключить, определяются в виде

$$\begin{pmatrix} Y_2(kh) \\ Y_3(kh) \\ \dots \\ Y_n(kh) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} U_{12}(h) & U_{13}(h) & \dots & U_{1n}(h) \\ U_{12}(2h) & U_{13}(2h) & \dots & U_{1n}(2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{12}((n-1)h) & U_{13}((n-1)h) & \dots & U_{1n}((n-1)h) \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} Y_1\big((k+1)h\big)-U_{11}(h)Y_1(kh) \\ Y_1\big((k+2)h\big)-U_{11}(2h)Y_1(kh) \\ \dots \\ Y_1\big((k+n-1)h\big)-U_{11}\big((n-1)h\big)Y_1(kh) \end{pmatrix}-$$

$$-\sigma\begin{pmatrix} U_{12}(h) & U_{13}(h) & \dots & U_{1n}(h) \\ U_{12}(2h) & U_{13}(2h) & \dots & U_{1n}(2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{12}\big((n-1)h\big) & U_{13}\big((n-1)h\big) & \dots & U_{1n}\big((n-1)h\big) \end{pmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \int\limits_{kh}^{(k+1)h} U_{1n}\big((k+1)h-\tau\big)dW(\tau) \\ \int\limits_{kh}^{(k+2)h} U_{1n}\big((k+2)h-\tau\big)dW(\tau) \\ \dots \\ \int\limits_{kh}^{(k+n-1)h} U_{1n}\big((k+n-1)h-\tau\big)dW(\tau) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

То есть значения производных порядков от 1 до $(n-1)$ основного процесса в момент времени kh выражаются через значения этого процесса в моменты времени kh, $(k+1)h$, ... , $(k+n-1)h$ и стохастические интегралы по соответствующим интервалам времени $(kh,(k+1)h)$, $(kh,(k+2)h)$, ... , $(kh,(k+n-1))$. Заметим, что эти интервалы интегрирования последовательно вкладываются друг в друга, поэтому компоненты последнего вектора в (21) являются зависимыми случайными величинами. Введем для краткости вектор $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = (V_2\ V_3\ \dots\ V_n) = (U_{12}(nh)\ U_{13}(nh)\ \dots\ U_{1n}(nh))\times$$

$$\times\begin{pmatrix} U_{12}(h) & U_{13}(h) & \dots & U_{1n}(h) \\ U_{12}(2h) & U_{13}(2h) & \dots & U_{1n}(2h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{12}\big((n-1)h\big) & U_{13}\big((n-1)h\big) & \dots & U_{1n}\big((n-1)h\big) \end{pmatrix}^{-1}. \tag{22}$$

Используя формулы (21) и (22), последнее уравнение (19) при $m = n$ можно написать в следующей форме:

$$y((n+k)h) = Y_1((n+k)h) = U_{11}(nh)Y_1(kh) +$$

$$+\ (V_2\,V_3\ \dots\ V_n)\times\begin{pmatrix} Y_1\big((k+1)h\big)-U_{11}(h)Y_1(kh) \\ Y_1\big((k+2)h\big)-U_{11}(2h)Y_1(kh) \\ \dots \\ Y_1\big((k+n-1)h\big)-U_{11}\big((n-1)h\big)Y_1(kh) \end{pmatrix}-$$

$$-\ \sigma(V_2\,V_3\ \dots\ V_n)\times\begin{pmatrix} \int\limits_{kh}^{(k+1)h}U_{1n}\big((k+1)h-\tau\big)dW(\tau) \\ \int\limits_{kh}^{(k+2)h}U_{1n}\big((k+2)h-\tau\big)dW(\tau) \\ \dots \\ \int\limits_{kh}^{(k+n-1)h}U_{1n}\big((k+n-1)h-\tau\big)dW(\tau) \end{pmatrix}+$$

$$+\ \sigma\int\limits_{kh}^{(k+n)h}U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)dW(\tau)\ . \tag{23}$$

Полученное соотношение является рекуррентным выражением значения случайного процесса, который следует уравнению (2), в момент времени $(k+n)h$ через n предыдущих значений этого процесса в моменты времени kh , $(k+1)h$, ... , $(k+n-1)h$ и некоторые случайные компоненты в виде стохастических интегралов, зависящие от реализации винеровского процесса на временном интервале $(kh,(k+n)h)$. Такое соотношение уже может рассматриваться как реализуемая математическая модель процесса, так как она не содержит производных. Стохастическая компонента этого соотношения может быть представлена в более удобной для анализа форме следующим образом.

$$\sigma\int\limits_{kh}^{(k+n)h}U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)dW(\tau)\ -$$

$$-\ \sigma(V_2\,V_3\ \dots\ V_n)\times\begin{pmatrix} \int\limits_{kh}^{(k+1)h}U_{1n}\big((k+1)h-\tau\big)dW(\tau) \\ \int\limits_{kh}^{(k+2)h}U_{1n}\big((k+2)h-\tau\big)dW(\tau) \\ \dots \\ \int\limits_{kh}^{(k+n-1)h}U_{1n}\big((k+n-1)h-\tau\big)dW(\tau) \end{pmatrix}=$$

$$=\sigma\sum_{j=1}^{n}\ \int\limits_{(k+j-1)h}^{(k+j)h}U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)dW(\tau)\ -$$

$$-\sigma\sum_{m=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{(k+j-1)h}^{(k+j)h}V_{m+1}U_{1n}\big((k+m)h-\tau\big)dW(\tau) =$$

$$= \sigma\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{(k+j-1)h}^{(k+j)h}U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)dW(\tau) - \tag{24}$$

$$-\sigma\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{(k+j-1)h}^{(k+j)h}\left[\sum_{m=j}^{n-1}V_{m+1}U_{1n}\big((k+m)h-\tau\big)\right]dW(\tau) =$$

$$= \sigma\int\limits_{(k+n-1)h}^{(k+n)h}U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)dW(\tau) +$$

$$+\sigma\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{(k+j-1)h}^{(k+j)h}\left[U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)-\sum_{m=j}^{n-1}V_{m+1}U_{1n}\big((k+m)h-\tau\big)\right]dW(\tau).$$

Обозначим для $j = 1, 2, \dots , n$

$$Z_j(k,n) = \sigma\int\limits_{0}^{h}\left[U_{1n}\big((n-j)h+s\big)-\sum_{m=j}^{n-1}V_{m+1}U_{1n}\big((m-j)h+s\big)\right]dW\big((k+j)h-s\big) \tag{25}$$

(в случае $j = n$ сумма в квадратных скобках под интегралом равна нулю; переменная интегрирования $s = (k+j)h - \tau$). Тогда стохастическая компонента соотношения (23) представляется в виде суммы

$$\sigma\int\limits_{kh}^{(k+n)h}U_{1n}\big((k+n)h-\tau\big)dW(\tau) -$$

$$-\sigma(V_2\, V_3\, \dots\, V_n)\times\begin{pmatrix}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}U_{1n}\big((k+1)h-\tau\big)dW(\tau)\\ \int\limits_{kh}^{(k+2)h}U_{1n}\big((k+2)h-\tau\big)dW(\tau)\\ \dots\\ \int\limits_{kh}^{(k+n-1)h}U_{1n}\big((k+n-1)h-\tau\big)dW(\tau)\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}Z_j(k,n). \tag{26}$$

Преимущество такого представления состоит в том, что из структуры выражения (25) следует, что слагаемые суммы (26) являются независимыми в совокупности нормально распределенными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, определяемыми следующими выражениями:

$$Var[Z_n(k,n)] = \sigma^2 \int_0^h \left[U_{1n}(s)\right]^2 ds \ ; \tag{27}$$

$$Var[Z_j(k,n)] = \sigma^2 \int_0^h \left[U_{1n}\left((n-j)h+s\right) - \sum_{m=j}^{n-1} V_{m+1} U_{1n}\left((m-j)h+s\right)\right]^2 ds \ . \tag{28}$$

Для краткости в дальнейшем будем обозначать $y_k = y(kh) \equiv Y_1(kh)$. Таким образом, соотношение (23) приобретает простой вид:

$$y_{k+n} = \sum_{m=1}^{n} a_m y_{k+n-m} + \sum_{j=1}^{n} Z_j(k,n), \tag{29}$$

где коэффициенты a_m, согласно уравнению (23), вычисляются по формулам:

$$a_n = U_{11}(nh) - \sum_{j=1}^{n-1} V_{j+1} U_{11}(jh) \ , \qquad a_m = V_{n+1-m}, \ m = 1, 2, \dots, n-1. \tag{30}$$

Отсюда следует, что решение стохастического уравнения (2), наблюдаемое в дискретные моменты времени через равные интервалы, похоже на формулу авторегрессии - скользящего среднего порядка (n,n) **(**ARMA(n,n)**)**. Более привычной формой ARMA(n,n) является выражение

$$y_{k+n} = \sum_{m=1}^{n} a_m y_{k+n-m} + \sum_{j=0}^{n-1} b_j \xi_{k+n-j} \ , \tag{31}$$

где $\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+n}$ независимые в совокупности случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, а коэффициенты скользящего среднего $b_j = (Var[Z_{n-j}(k,n)])^{1/2}$ определяются с помощью формул (27) и (28). Однако в нашем случае нет полной эквивалентности между $Z_{n-j}(k,n)$ и $b_j \xi_{k+n-j}$, так как их корреляционные свойства различаются. В частности, для $0 \le l \le n-1$, $0 \le j \le n-l-1$

$$Cov(b_j \xi_{k+n-j}, b_{j+l} \xi_{k+l+n-(j+l)}) = b_j b_{j+l} =$$

$$= (Var[Z_{n-j}(k,n)] \times Var[Z_{n-j-l}(k+l,n)])^{1/2} \ . \tag{32}$$

В то же самое время для этих же $0 \le l \le n-1$, $0 \le j \le n-l-1$

$$Cov(Z_{n-j}(k,n), Z_{n-j-l}(k+l,n)) =$$

$$= \sigma^2 \int_0^h \left[U_{1n}\left(jh+s\right) - \sum_{m=n-j}^{n-1} V_{m+1} U_{1n}\left(\left(m-n+j\right)h+s\right)\right] \times \tag{33}$$

$$\times \left[U_{1n}\left(\left(j+l\right)h+s\right) - \sum_{m=n-j-l}^{n-1} V_{m+1} U_{1n}\left(\left(m-n+j+l\right)h+s\right)\right] ds .$$

Сравнение выражений (32) и (33) дает, что по неравенству Коши – Буняковского

$$|Cov(Z_{n-j}(k,n)\ ,\ Z_{n-j-l}(k+l,n))| \le |Cov(b_j \xi_{k+n-j}\ ,\ b_{j+s}\xi_{k+l+n-(j+l)})|\ ,$$

Поскольку корреляционные свойства процесса скользящего среднего существенно влияют на дисперсию процесса $y(t)$, то использование обычной модели ARMA(n,n), определяемой формулой (31), является проблематичным, и следует в качестве разностной версии стохастического дифференциального уравнения (2), рассматриваемой как реализуемая математическая модель, использовать соотношение (29) с учетом соотношений (25) и (30).

УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

При условии $n = 2$ имеем наиболее простой случай. Пусть уравнение (2) имеет вид

$$dy^{(1)}(t) + 2a\, y^{(1)}(t)\, dt + by(t)\, dt = \sigma\ dW(t)\ . \tag{34}$$

Корни характеристического полинома находятся из уравнения

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0\ ,\ \ \lambda_{2,1} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}\ . \tag{35}$$

Матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}^{-1}$ **(**см. (17) и (18)**)** имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix},\quad B^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Фундаментальная матрица решений $\boldsymbol{U}(t)$

$$U(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_2 \lambda_1 \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right) & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Уравнения (19) принимают вид

$$y((k+2)h) = U_{11}(2h)y(kh) + U_{12}(2h)y'(kh) + \sigma \int_0^{2h} U_{12}(2h-\tau)dW(\tau+kh);$$

$$y((k+1)h) = U_{11}(h)y(kh) + U_{12}(h)y'(kh) + \sigma \int_0^{h} U_{12}(h-\tau)dW(\tau+kh). \qquad (38)$$

Система (20) вырождается в единственное уравнение для определения производной $y^{(1)}(kh)$ из второго уравнения (38). Поэтому в этом случае нет необходимости использовать представление (22) и выражение (21) выписывается в явной форме:

$$y^{(1)}(kh) = \frac{1}{U_{12}(h)} \left(y((k+1)h) - U_{11}(h)y(kh) - \sigma \int_0^{h} U_{12}(h-\tau)dW(\tau+kh) \right). \qquad (39)$$

Решение в форме (23) дается выражением

$$y((k+2)h) = U_{11}(2h)y(kh) + \frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)} [\, y((k+1)h) - U_{11}(h)y(kh) -$$

$$- \sigma \int_0^{h} U_{12}(h-\tau)dW(\tau+kh) \,] + \sigma \int_0^{2h} U_{12}(2h-\tau)dW(\tau+kh). \qquad (40)$$

Стохастическая компонента выражения (40) имеет вид

$$\sigma \int_0^{2h} U_{12}(2h-\tau)dW(\tau+kh) - \frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)} \sigma \int_0^{h} U_{12}(h-\tau)dW(\tau+kh) =$$

$$= \sigma \int_0^{h} U_{12}(h-\tau)dW(\tau+(k+1)h) +$$

$$+ \sigma \int_0^{h} \left[U_{12}(2h-\tau) - \frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)} U_{12}(h-\tau) \right] dW(\tau+kh). \qquad (41)$$

Так что

$$Z_1(k,2) = \sigma \int_0^{h} \left[U_{12}(2h-\tau) - \frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)} U_{12}(h-\tau) \right] dW(\tau+kh); \qquad (42)$$

$$Z_2(k,2) = \sigma\int_0^h U_{12}(h-\tau)dW\big(\tau+(k+1)h\big) \ . \tag{43}$$

Случайные величины $Z_1(k,2)$ и $Z_2(k,2)$ являются независимыми и имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, вычисляемые по формулам:

$$Var[Z_1(k,2)] = \sigma^2\int_0^h\left[U_{12}(2h-\tau)-\frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)}U_{12}(h-\tau)\right]^2 d\tau\,; \tag{44}$$

$$Var[Z_2(k,2)] = \sigma^2\int_0^h\left[U_{12}(h-\tau)\right]^2 d\tau \ . \tag{45}$$

Корреляционные свойства этих случайных величин определяются соотношением (для других различающихся значений параметров ковариация равна нулю)

$$Cov[Z_2(k,2),\, Z_1(k+1,2)] =$$

$$=\sigma^2\int_0^h\left[U_{12}(2h-\tau)-\frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)}U_{12}(h-\tau)\right]U_{12}(h-\tau)d\tau\,. \tag{46}$$

Из выражения (37) следует, что необходимые элементы фундаментальной матрицы решений $U(t)$ имеют вид

$$U_{11}(t) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\lambda_2 e^{\lambda_1 t}-\lambda_1 e^{\lambda_2 t}\right); \tag{47}$$

$$U_{12}(t) = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{\lambda_2 t}-e^{\lambda_1 t}\right). \tag{48}$$

Поэтому

$$\frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)} = e^{\lambda_2 h}+e^{\lambda_1 h}\ ; \tag{49}$$

$$U_{11}(2h)-\frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)}U_{11}(h) = -e^{(\lambda_1+\lambda_2)h}; \tag{50}$$

$$U_{12}(2h-\tau)-\frac{U_{12}(2h)}{U_{12}(h)}U_{12}(h-\tau)=$$
$$=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}e^{(\lambda_1+\lambda_2)h}\left(e^{-\lambda_1\tau}-e^{-\lambda_2\tau}\right)=-e^{(\lambda_1+\lambda_2)h}U_{12}(-\tau)\ . \tag{51}$$

Таким образом, соотношение (40), задающее разностную модель стохастического процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением (34), имеет вид

$$y_{k+2}=a_1y_{k+1}+a_2y_k+Z_1(k,2)+Z_2(k,2)\ , \tag{52}$$

где коэффициенты a_1 и a_2 определяются по формулам

$$a_1=e^{\lambda_2h}+e^{\lambda_1h}\ ,\ a_2\ =\ -e^{(\lambda_1+\lambda_2)h}\ , \tag{53}$$

а случайные величины $Z_1(k,2)$ и $Z_2(k,2)$ имеют следующие вероятностные характеристики:

$$\gamma=Var[Z_1(k,2)]=\sigma^2e^{2(\lambda_1+\lambda_2)h}\int_0^h\left[U_{12}(-\tau)\right]^2d\tau=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{e^{2(\lambda_1+\lambda_2)h}}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{\lambda_1\lambda_2\left(e^{\lambda_2h}-e^{\lambda_1h}\right)^2+\left(\lambda_1e^{\lambda_1h}-\lambda_2e^{\lambda_2h}\right)^2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)^2(\lambda_1+\lambda_2)}\right]; \tag{54}$$

$$\delta=Var[Z_2(k,2)]=\sigma^2\int_0^h\left[U_{12}(\tau)\right]^2d\tau=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2\left(e^{\lambda_2h}-e^{\lambda_1h}\right)^2+\left(\lambda_1e^{\lambda_2h}-\lambda_2e^{\lambda_1h}\right)^2}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)^2(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}\right]; \tag{55}$$

$$\varepsilon=Cov[Z_2(k,2),Z_1(k+1,2)]=-\sigma^2e^{(\lambda_1+\lambda_2)h}\int_0^hU_{12}(h-\tau)U_{12}(-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\frac{e^{(\lambda_1+\lambda_2)h}}{\left(\lambda_2^2-\lambda_1^2\right)^2}\left[\frac{e^{-\lambda_1h}-e^{\lambda_1h}}{\lambda_1}+\frac{e^{\lambda_2h}-e^{-\lambda_2h}}{\lambda_2}\right]. \tag{56}$$

Заметим, что процесс, определяемый уравнением (34), будет устойчивым (каузальным – causal), если собственные числа λ_1 и λ_2 отрицательные (или имеют отрицательную вещественную составляющую, когда они являются комплексно сопряженными). Иначе говоря, если в уравнении (34) $a > 0$. Пользуясь техникой исследования временных рядов, в этом случае можно представить временной ряд (52) в виде

$$y_{k+2} = \frac{1}{e_2 - e_1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(e_2^{j+1} - e_1^{j+1}\right)\left[Z_1(k-j,2) + Z_2(k-j,2)\right], \tag{57}$$

где для краткости обозначено

$$e_1 = e^{\lambda_1 h}, \quad e_2 = e^{\lambda_2 h}. \tag{58}$$

Тогда соотношения (52) и (57) позволяют получить уравнения Юла – Уокера для корреляционной функции $r(t)$ временного ряда (52):

$$r(0) - (e_1 + e_2)r(1) + e_1 e_2 r(2) = \gamma + \delta + (e_1 + e_2)\,\varepsilon; \tag{59}$$

$$r(1) - (e_1 + e_2)r(0) + e_1 e_2 r(1) = \varepsilon; \tag{60}$$

$$r(k+2) - (e_1 + e_2)r(k+1) + e_1 e_2 r(k) = 0, \; k \geq 0. \tag{61}$$

Уравнению (61) удовлетворяет функция

$$r(k) = C_1 e_1^k + C_2 e_2^k \equiv C_1 e^{\lambda_1 hk} + C_2 e^{\lambda_2 hk}. \tag{62}$$

Подстановка функции (62) в уравнения (59) и (60) приводит к системе уравнений относительно коэффициентов C_1 и C_2, которые определяются формулами

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e_1(\gamma+\delta) + \left(1 + e_1^2\right)\varepsilon}{(e_1 - e_2)\left(1 - e_1^2\right)(1 - e_1 e_2)} \\ C_2 &= \frac{e_2(\gamma+\delta) + \left(1 + e_2^2\right)\varepsilon}{(e_2 - e_1)\left(1 - e_2^2\right)(1 - e_1 e_2)}. \end{aligned} \tag{63}$$

Формулы (58), (62) и (63) полностью определяют корреляционную функцию процесса y_k, задаваемого соотношением (52). Заметим, что дисперсия этого процесса равна $r(0) = C_1 + C_2$, что позволяет найти ее в виде

$$Var[y_k] = \frac{(1+e_1e_2)(\gamma+\delta)+2(e_1+e_2)\varepsilon}{(1-e_1^2)(1-e_2^2)(1-e_1e_2)} \;. \tag{64}$$

Рассмотрим поведение корреляционной функции (62) в случае вещественных корней. Предположим для определенности, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Для устойчивых процессов эти корни будут отрицательными, поэтому в обозначениях (58) имеем, что $e_1 < e_2 < 1$. Из формул (63) видно, что коэффициенты C_1 и C_2 должны иметь разные знаки, и в нашем случае такие, что $C_1 < 0 < C_2$. Но сумма $C_1 + C_2$ является положительной, что следует из выражения (64), и поэтому $|C_1| < |C_2|$. Кроме того, из вышесказанного следует, что $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Таким образом, в выражении (62) отрицательное слагаемое при $t = 0$ меньше положительного и с увеличением t быстрее, чем положительное слагаемое стремится к нулю. Отсюда следует, что при вещественных корнях уравнения (34) корреляционная функция устойчивого процесса всегда положительная и с увеличением аргумента монотонно уменьшается до нуля.

Рассмотрим теперь случай комплексных корней. Пусть собственные числа λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными, то есть

$$\lambda_1 = \alpha - i\beta \;,\; \lambda_2 = \alpha + i\beta \;,\;\; \alpha < 0 \,. \tag{65}$$

В этом случае формулы (53) преобразуются к виду

$$a_1 = e^{\lambda_2 h} + e^{\lambda_1 h} = 2\,e^{\alpha h}\cos\beta h,\;\; a_2 = -e^{(\lambda_1+\lambda_2)h} = -\,e^{2\alpha h} \,. \tag{66}$$

Коэффициенты C_1 и C_2, определяемые формулами (63), тоже являются комплексно сопряженными. В связи с этим введем обозначения

$$C_1 = u + iv \;,\;\; C_2 = u - iv \,. \tag{67}$$

Используя (65) в формулах (63), получим следующие выражения для u и v:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+e^{2\alpha h})(\gamma+\delta)+(2e^{\alpha h}\cos\beta h)\varepsilon}{(1-e^{2\alpha h})(1-2e^{2\alpha h}\cos 2\beta h+e^{4\alpha h})}\;; \\ v &= \frac{(e^{\alpha h}\cos\beta h)(\gamma+\delta)+(1+e^{2\alpha h})\varepsilon}{2e^{\alpha h}\sin\beta h(1-2e^{2\alpha h}\cos 2\beta h+e^{4\alpha h})}\;. \end{aligned} \tag{68}$$

Выражение для корреляционной функции преобразуется к виду

$$r(k) = C_1 e^{\lambda_1 hk} + C_2 e^{\lambda_2 hk} = 2\,e^{\alpha hk}\left(u\cos\beta hk - v\sin\beta hk\right).$$

Это выражение можно представить в несколько другой форме:

$$r(k) = 2\sqrt{u^2 + v^2}\, e^{\alpha hk} \cos\left(\beta hk + \psi\right), \tag{69}$$

где ψ определяется из равенства $tg\psi = v/u$. Заметим, что дисперсия процесса y_k, определяемого соотношением (52), в обозначениях (67) равна $Var[y_k] = 2u$. Наконец, часто удобнее пользоваться нормированной корреляционной функцией

$$C(k) = \frac{r(k)}{r(0)} = e^{\alpha hk} \frac{\cos\left(\beta hk + \psi\right)}{\cos\psi} . \tag{70}$$

Таким образом, если реальный финансовый ряд имеет корреляционную функцию, принимающую не только положительные, но и отрицательные значения, и напоминает затухающую косинусоиду, то в качестве математической модели такого временного ряда разумно принимать соотношение (52), которое в случае комплексных собственных чисел удобно записать, используя представления (66):

$$y_{k+2} = 2\, e^{\alpha h}\cos\beta h\, y_{k+1} - e^{2\alpha h}\, y_k + Z_1(k,2) + Z_2(k,2) . \tag{71}$$

Обсудим теперь кратко проблему оценивания параметров модели по реальным наблюдениям. Пусть $\{Y_k,\ k = 1, 2, \dots, N\}$ является имеющейся в наличии выборкой значений рассматриваемого финансового временного ряда. Преобразуем ее в выборку разностей $\{\, Y_{k+2} - a_1 Y_{k+1} - a_2 Y_k,\ k = 1, 2, \dots, N-2 \,\}$ и составим из них вектор $\boldsymbol{Y}(a_1, a_2)$ с $N - 2$ компонентами. Как следует из модели (52), величины $(Y_{k+2} - a_1 Y_{k+1} - a_2 Y_k)$ являются реализациями нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями, дисперсиями и ковариациями, задаваемыми формулами (54) - (56), так что имеется достаточная информация, чтобы составить корреляционную матрицу Σ вектора $\boldsymbol{Y}$:

$$\Sigma(\gamma,\delta,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \gamma+\delta & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon & \gamma+\delta & \varepsilon & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \gamma+\delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma+\delta \end{pmatrix}. \tag{72}$$

В этих условиях для оценивания параметров модели естественно использовать метод максимального правдоподобия. Напомним, что параметры модели a_1, a_2,

$\gamma, \delta, \varepsilon$ определяются по формулам (53) - (56) через λ_1, λ_2 и σ. Поэтому приходим к задаче: минимизировать по переменным λ_1, λ_2 и σ выражение

$$(N-2)\ln \det \boldsymbol{\Sigma}(\gamma, \delta, \varepsilon) + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(a_1, a_2)\, \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\gamma, \delta, \varepsilon)\, \boldsymbol{Y}(a_1, a_2), \quad (73)$$

которое является зависящей от λ_1, λ_2 и σ частью логарифмической функции правдоподобия. Когда корреляционная функция реального временного ряда является монотонно уменьшающейся неотрицательной функцией, λ_1 и λ_2 следует искать среди вещественных чисел. Если же корреляционная функция реального временного ряда принимает не только положительные, но и отрицательные значения, вместо формул (53) следует использовать формулы (66) и соответствующие формулам (54) - (56) выражения, определяющие зависимость $\gamma, \delta, \varepsilon$ через α, β и σ (эти выражения здесь не приводятся из-за громоздкости), и минимизировать выражение (73) по переменным α, β и σ. Способ получения оценок является отдельной темой и поэтому рассматривается дальше. Укажем только, что вместо решения достаточно сложной задачи минимизации выражения (73) на практике для определения необходимых параметров можно воспользоваться простым эмпирическим приемом, который описан в следующем разделе.

ЧИСЛОВОЙ ПРИМЕР РЕАЛЬНЫХ СТАВОК ДОХОДНОСТИ

В качестве иллюстрации изложенного выше рассмотрим реальный временной ряд, показывающий изменение во времени доходности трехмесячных билетов казначейства США за период с января 1991 г. по декабрь 1995 г. (значения доходности за 1435 деловых дней). Общий вид временного ряда и его тренд показаны на рис. 2.

Общий вид отклонений от тренда показан на рис. 3, который позволяет предположить, что процесс отклонений можно рассматривать как стационарный процесс. На рис. 4 представлена нормированная корреляционная функция процесса отклонений доходностей от тренда. Как видим, корреляционная функция процесса фактических отклонений не может аппроксимироваться экспонентой, что влечет за собой невозможность принятия в качестве математической модели процесса авторегрессию первого порядка и, следовательно, стохастического дифференциального уравнения типа (4). Рассмотрим возможность использования для этой цели стохастического дифференциального уравнения (34) и вытекающую из него разностную модель (52) **(**или (71)**)**. Для этой цели аппроксимируем нормированную корреляционную функцию (НКФ), изображенную на рис. 4, функцией (70). Приведем достаточно простой эмпирический способ установления параметров модели по виду корреляционной функции. Эта функция задается тремя параметрами: α, β и ψ. Для их определения можно воспользоваться тремя следующими эмпирическими данными: значением аргумента t_1, соответствующего первому нулю НКФ; значением аргумента

t_2 , соответствующего второму нулю НКФ; парой значений аргумента и НКФ (t_m,C_m), соответствующих первому минимуму НКФ.

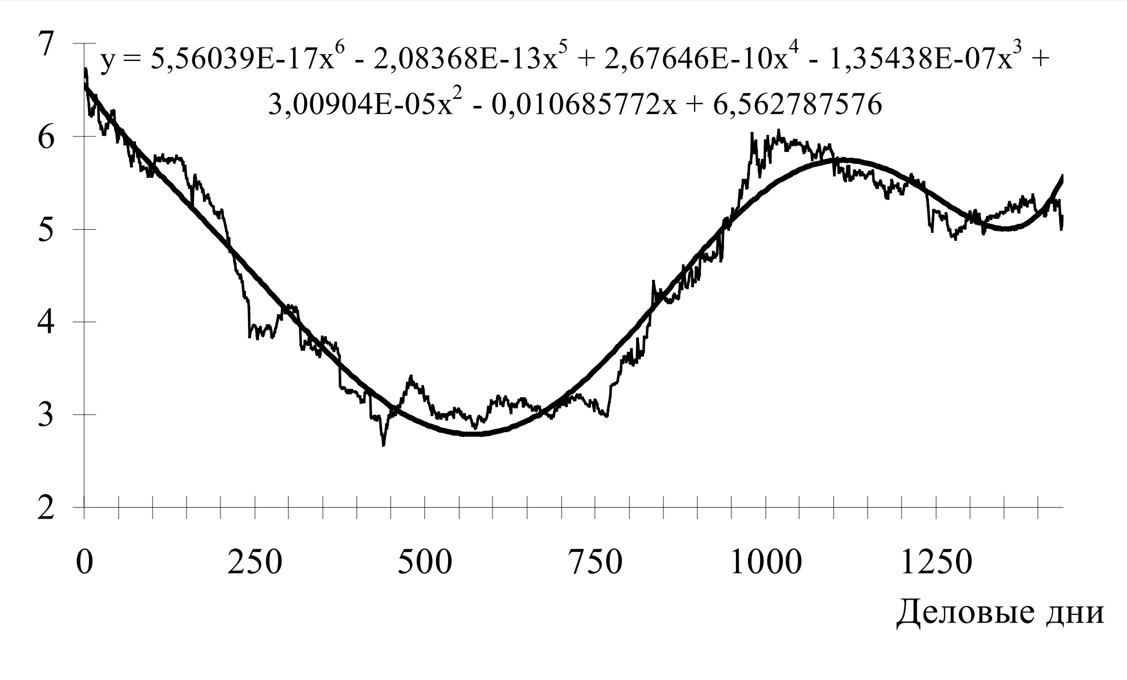


Рис. 2. Общий вид процесса доходности (%) трехмесячных векселей казначейства США и его тренда в виде полинома шестого порядка. В верхней части рисунка приводится уравнение тренда.

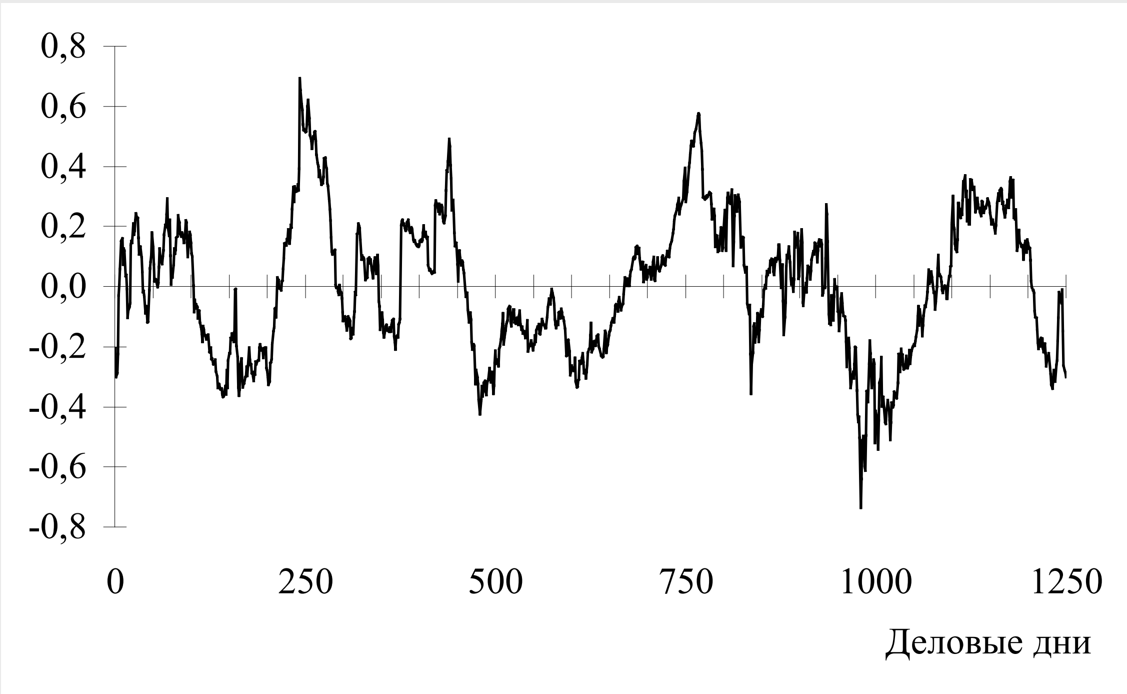


Рис. 3. Общий вид стохастического процесса отклонений (%) от тренда для процесса доходности, изображенного на рис. 2.

Эти три точки на кривой НКФ легко идентифицируются. Используя эти данные, мы можем получить три соотношения для определения необходимых параметров:

$$C(t_1) = e^{\alpha t_1} \frac{\cos(\beta t_1 + \psi)}{\cos\psi} = 0 , \quad \beta t_1 + \psi = \pi/2 ; \tag{74}$$

$$C(t_2) = e^{\alpha t_2} \frac{\cos(\beta t_2 + \psi)}{\cos\psi} = 0 , \quad \beta t_2 + \psi = 3\pi/2 ; \tag{75}$$

$$C(t_m) = e^{\alpha t_m} \frac{\cos(\beta t_m + \psi)}{\cos\psi} . \tag{76}$$

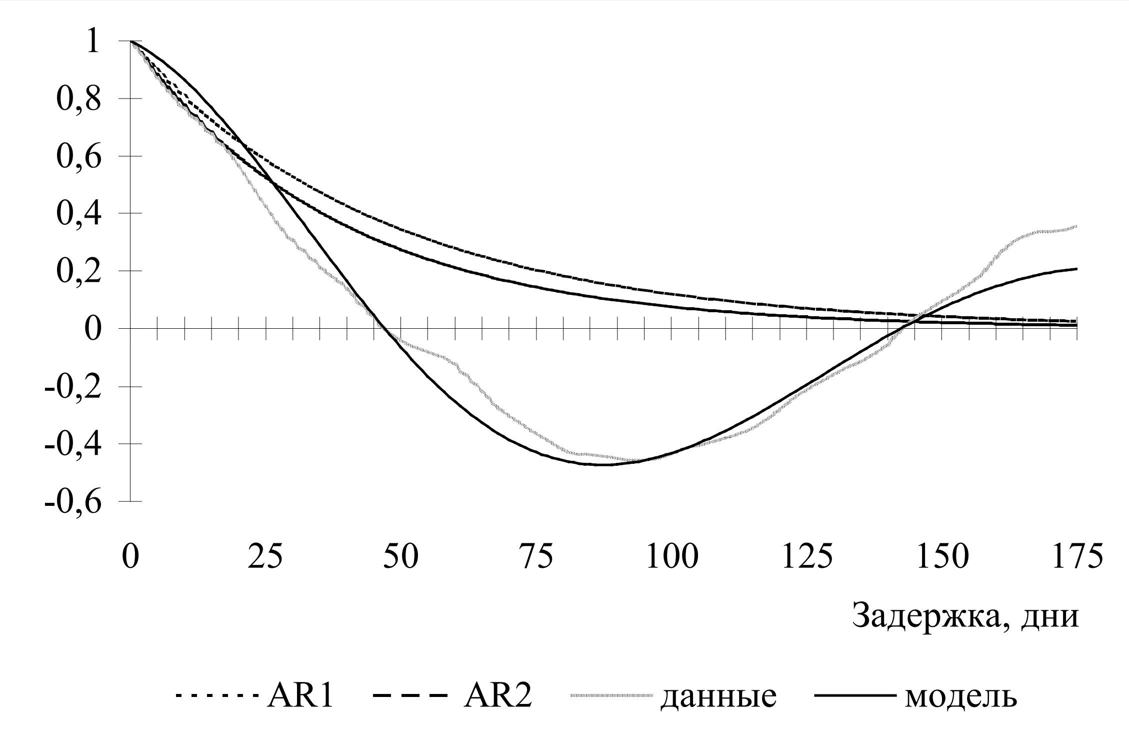


Рис. 4. Нормированные корреляционные функции для процесса отклонений доходности от тренда для трех случаев: реальных данных (данные), аппроксимации моделью (52) (модель) и аппроксимации моделями авторегрессии первого (AR1) и второго (AR2) порядков.

Пользуясь соотношениями (74) – (76), легко находим

$$\beta = \frac{\pi}{(t_2 - t_1)} , \tag{77}$$

$$\psi = \pi \frac{(t_2 - 3t_1)}{2(t_2 - t_1)} , \tag{78}$$

$$\alpha = \frac{1}{t_m} \ln\left(\frac{C(t_m)\cos\psi}{\cos(\beta t_m + \psi)} \right). \tag{79}$$

В нашем случае $t_1 = 47{,}0$; $t_2 = 142{,}5$; $t_m = 95{,}0$; $C_m = -0{,}457$. Используя формулы (77) - (79), получим $\alpha = -0{,}00824$; $\beta = 0{,}0329$; $\psi = 0{,}0247$. Нормированная корреляционная функция (70) для этих параметров также представлена на рис. 4 (модель). На этом рисунке изображена также НКФ для AR1 и AR2, которые получаются с помощью реальных данных, когда они аппроксимируются с помощью метода наименьших квадратов авторегрессионными моделями первого и второго порядков.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Обычно используемые в литературе при описании стохастического поведения процентных ставок и других финансовых показателей стохастические дифференциальные уравнения вида (1), основанные на приращениях винеровского процесса, приводят к марковским процессам, которые имеют свойства, не всегда уместные для реальных финансовых временных рядов. В этом разделе мы использовали другой тип стохастических дифференциальных уравнений (2), который позволяет получать процессы с зависимыми приращениями, что значительно расширяет круг моделируемых с их помощью реальных процессов. Предлагаемые уравнения приводят к разностным схемам, моделирующим реальные финансовые временные ряды, которые по свойствам отличаются от авторегрессионных моделей AR(n) и ARMA(n,n) (для $n > 1$), хотя внешне имеют большое сходство с ними. В общем случае при аппроксимации временного ряда моделью n-го порядка максимизация функции правдоподобия происходит по $n + 1$ переменным: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и σ. После чего все параметры модели определяются через эти найденные переменные. При этом между параметрами модели должны иметь место вполне определенные функциональные соотношения, задаваемые равенствами (27), (28), (30) и (33). Эти соотношения, по существу, являются ограничениями при максимизации функции правдоподобия. При аппроксимации временного ряда авторегрессионными моделями AR(n) и ARMA(n,n) максимизация производится сразу по параметрам модели, которые рассматриваются как независимые переменные. Поэтому в данном случае может быть достигнуто большее значение функции правдоподобия и эти модели могут казаться более правдоподобными. Однако эта кажущаяся большей правдоподобность достигается в рамках другой, неадекватной модели, поэтому свойства авторегрессионных моделей AR(n) и ARMA(n,n) могут не отражать свойств реальных финансовых рядов, хотя в рамках своей модели обеспечивают большее значение функции правдоподобия. В заключение приведем сравнительные цифры, полученные при аппроксимации траектории поведения доходности трехмесячных билетов казначейства США за период с января 1991 г. по декабрь 1995 г. тремя способами: основанным на модели (52), AR(1) и AR(2). Сравнение производится при помощи следующей функции качества:

$$Q = \sum_{k=1}^{N} \left(Y_{k+2} - a_1 Y_{k+1} - a_2 Y_k \right)^2 .$$

Численные результаты составляют таблицу:

	a_1	a_2	Q
AR(1)	0,97898	0	2,72246
AR(2)	1,07387	– 0,09696	2,69680
Модель (52)	1,98251	– 0,98365	4,94457

Таким образом, авторегрессионные модели лучше отслеживают траекторию, однако, как следует из рис. 4, неадекватно описывают корреляционные свойства финансового временного ряда.

4 ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ

4.1 БИНОМИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

В этом разделе рассматриваются основные результаты, касающиеся определения цен основных активов и финансовых производных при помощи моделей, когда цены (или процентные ставки) изменяются через регулярные временные периоды и могут принимать конечное или счетное множество значений. Сначала мы рассмотрим однопериодную модель с двумя различными исходами и двумя активами. Затем перейдем к изучению случая, когда сделки могут совершаться в некоторые даты, образующие конечную последовательность.

Поскольку для понимания существа дела такие модели проще непрерывных моделей, будет сделана попытка аппроксимации моделей, уже рассмотренных в предыдущих главах, в форме дискретных моделей.

МОДЕЛЬ ОДНОГО ПЕРИОДА

Простейшей вероятностной моделью изменения цены активов является модель Бернулли. Она строится на следующей основе. Пусть некоторый актив покупается инвестором в момент времени t по цене S_t и погашается (продается) в момент времени T по цене S_T, $t < T$. Предположим, что актив не предполагает выплаты дивидендов и не требует никаких расходов в течение интервала времени $(t\,,T)$; при этом ставка доходности $y(t,T)$ рассматриваемого актива в течение времени $\tau = T - t$ может принимать одно из двух значений

$$y(t,T) = \begin{cases} \tau^{-1}\ln u & с \quad вероятностью \quad p, \\ \tau^{-1}\ln d & с \quad вероятностью \quad 1-p, \end{cases}$$

где u, d и p являются параметрами модели. Два соответствующих возможных значения цены в момент погашения (продажи) даются следующим соотношением:

$$S_T = \begin{cases} S_t u & с \quad вероятностью \quad p, \\ S_t d & с \quad вероятностью \quad 1-p. \end{cases}$$

Параметры u, d и p можно оценить с помощью изменений на рынке за какой-нибудь предшествующий период. Будем считать, что символ u соответствует изменению цены выше (*up*) определенного уровня, а символ d соответствует изменению цены ниже (*down*) этого уровня. Так что не обязательно $d < 1 < u$, но предполагается, что $d < u$. Пусть y^* является безрисковой ставкой доходности за период, тогда можно показать, что необходимым условием отсутствия арбитража в такой модели будет выполнение неравенства $d \le r = \exp\{\,y^*\tau\} \le$

u. При этом ожидаемая цена погашения актива совпадает с ценой погашения безрискового актива с такой же начальной стоимостью, то есть $E[S_T] = S_t \exp\{y^*\tau\} = S_t r$, только тогда, когда вероятность p изменения цены выше безрискового уровня вычисляется по формуле $p = \dfrac{r-d}{u-d}$.

Поскольку модель Бернулли характеризует возможное изменение цены актива за некоторый отдельный временной период, ее обычно называют *моделью одного периода* (*single period model*). Вместе с тем ее можно рассматривать как фрагмент модели, характеризующей изменение цен в течение некоторой последовательности периодов времени (например, нескольких лет). Обычно в такой расширенной модели предполагается, что изменение цен в последующие периоды не зависит от того, каким образом изменялась цена в предыдущих периодах, т. е. модель определяет процесс изменения цен с их независимыми приращениями в течение последовательных периодов. В этом случае процесс изменения цены актива является марковским, а сама модель, представляющая комбинацию моделей Бернулли, называется биномиальной моделью.

БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН АКЦИЙ

Процесс изменения цен активов, который разработан в предыдущих главах, использует две функции, влияющие на характер случайного изменения финансовых переменных: функцию дрейфа μ и волатильность σ. Значения этих функций зависят от единиц, в которых измеряются финансовые переменные. Временные интервалы $\tau = T - t$, как правило, измеряются в годах.

Параметр μ обычно является ожидаемым пропорциональным доходом, зарабатываемым инвестором за короткий период времени. Он приводится к году и выражается как относительная величина. Большинство инвесторов желают высоких ожидаемых доходов, а это побуждает их принимать высокие риски. Из этого следует, что значение μ должно зависеть от риска прибыли, ожидаемой от актива. Более точно, μ зависит от той части риска, которой не может управлять инвестор. Оно должно также зависеть от уровня процентной ставки в экономике. Чем выше уровень процентной ставки, тем выше доход, ожидаемый от какого-либо заданного актива (например, акции). Так, анализ финансового рынка США показывает, что там для акций μ в среднем примерно на 8% больше, чем доход на такую свободную от риска инвестицию, как краткосрочный билет Казначейства США. Таким образом, когда доход на казначейский билет равен 8% годовых (0,08), обычное значение μ равно 0,16, т. е. ожидаемый доход на акцию равен 16% годовых.

Заметим, что при анализе финансовых производных нет необходимости рассматривать какие-либо подробности определения μ, поскольку стоимость ценной бумаги, производной от акции, вообще не зависит от μ. Наоборот, параметр σ, волатильность цены акции, является крайне важным для определения стоимости большинства выплат, на которые влияют значения процентных ставок. Процедуры эмпирического оценивания параметров μ и σ будут рассмотрены позже. На финансовом рынке США обычные значения σ для акций лежат в диапазоне от 0,2 до 0,4 (от 20% до 40%).

Из структуры стохастических дифференциальных уравнений естественно предположить, что стандартное отклонение пропорционального изменения цены акции в течение малого интервала времени Δt равно $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Поэтому в качестве грубой аппроксимации стандартное отклонение относительного изменения цены акции через относительно длинный период времени T можно принять равным $\sigma\sqrt{T}$. Это означает, что приближенно волатильность можно интерпретировать как стандартное отклонение изменения цены акции за единицу времени (то есть за год).

Мы будем рассматривать биномиальную модель как дискретную аппроксимацию моделей непрерывного времени для цен акций. Предположим, что цена акции в начале рассматриваемого интервала равна S. В биномиальной модели цена акции следует процессу, фрагмент которого (модель Бернулли) показан на рис. 1, для очередного малого интервала времени длительностью Δt. Она изменяется вверх до Su с вероятностью p и вниз до Sd с вероятностью $(1-p)$.

На рис. 2 показано, как биномиальная модель приводит к трем различным возможным ценам акций по прошествии двух временных интервалов, четырем различным возможным ценам акций в конце трех временных интервалов и т. д.

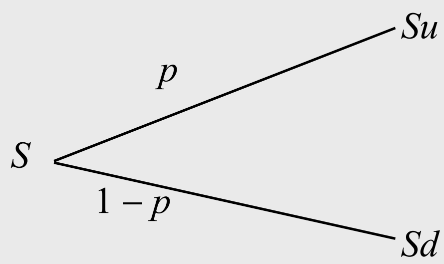


Рис. 1. Фрагмент биномиальной модели

Переменные u, d и p должны выбираться так, чтобы для малого интервала времени Δt ожидаемый доход от цены акции по истечении Δt равнялся $\mu\,\Delta t$ и дисперсия дохода по прошествии времени Δt была равна $\sigma^2\Delta t$. Чтобы сделать это, можно для достаточно малого интервала времени Δt определить эти параметры соотношениями

$$u = \exp\{\sigma\sqrt{\Delta t}\}\,,\;\; d = \exp\{-\sigma\sqrt{\Delta t}\} = 1/u\,, \quad p = \frac{\exp\{\mu\Delta t\} - d}{u-d}.$$

Для обоснования того, что значения u, d и p имеют необходимые свойства, заметим, что ожидаемое изменение цены акции за интервал времени Δt равно

$$p\,Su + (1-p)\,Sd \;=\; S\exp\{\mu\Delta t\}\,.$$

Дисперсия изменения цены акции за время Δt равна

$$p\,S^2 u^2 + (1-p)\,S^2 d^2 - S^2 \exp\{2\mu\Delta t\}\ .$$

Подставляя сюда явные выражения параметров, получим

$$S^2[\ \exp\{\mu\Delta t\}(\ \exp\{\sigma\sqrt{\Delta t}\ \} + \exp\{-\ \sigma\sqrt{\Delta t}\ \}) - 1 - \exp\{2\mu\Delta t\}].$$

Разлагая $\exp\{x\}$ в ряд и пренебрегая членами порядка малости $(\Delta t)^2$ и выше, дисперсию цены акции получаем в виде $S^2\ \sigma^2\Delta t$.

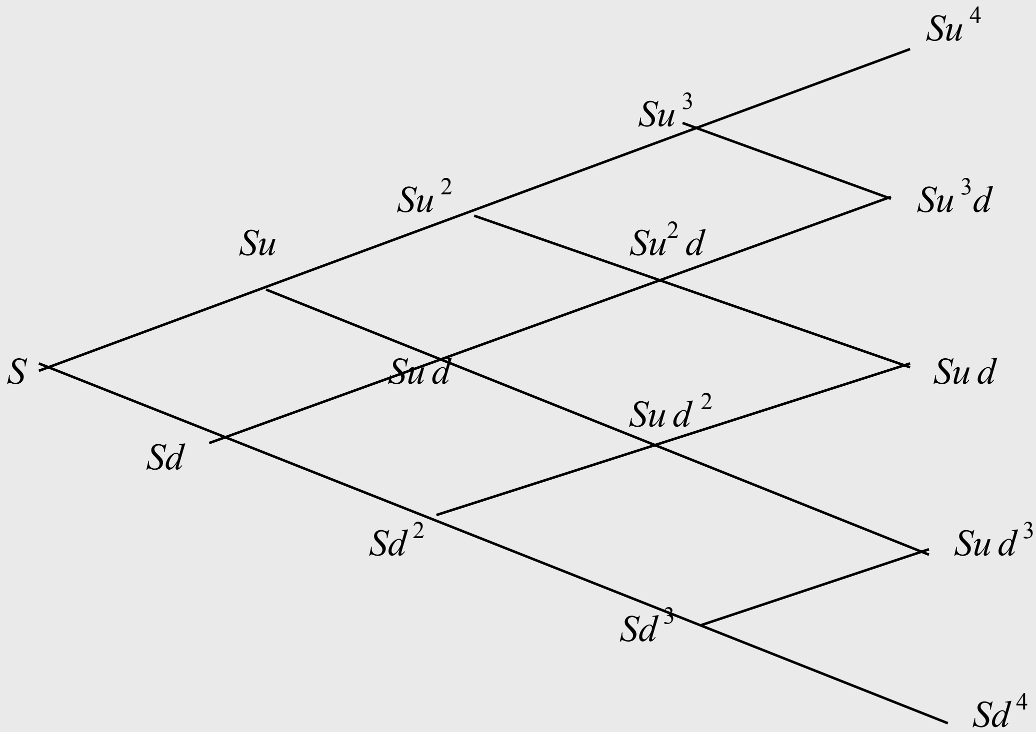


Рис. 2. Изменения цены акции за четыре периода в биномиальной модели

Можно показать, что в пределе при $\Delta t \to 0$ описанная биномиальная модель изменения цен акции становится моделью геометрического броуновского движения.

Пример 1. Рассмотрим цену акции, которая предусматривает ожидаемый доход 12% годовых и имеет волатильность 30% годовых. Предположим, что биномиальная модель используется для представления изменений через временной период 0,04 года (примерно 2 недели). В этом случае $\mu = 0{,}12$, σ = 0,30 и $\Delta t = 0{,}04$ и из приведенных выше формул

$$u = \exp\{0{,}30 \times \sqrt{0{,}04}\ \} = 1{,}0618\ ; \qquad d = 1/u = 0{,}9418\ ;$$

$$p = \frac{\exp\{0{,}12 \times 0{,}04\} - 0{,}9418}{1{,}0618 - 0{,}9418} = 0{,}525\ .$$

Когда цена акции в начальный момент времени равна \$100, изменения в течение четырех интервалов времени длительностью Δt могут быть такими, как показано на рис. 3. Вероятность изменения цены вверх всегда равна 0,525 , а вероятность изменения вниз всегда равна 0,475. Для цены акции \$112,7 , встречающейся в конце четвертого временного интервала, должно быть три изменения вверх и одно изменение вниз. Имеется четыре пути, которые приводят к такой цене. Это DUUU, UDUU, UUDU и UUUD, где U обозначает изменение вверх и D обозначает изменение вниз. Отсюда вероятность того, что цена акции составит \$112,7 в конце четвертого временного интервала, равна $4\times0{,}525^3\times0{,}475 = 0{,}275$. Вероятности, что цена акции будет равна \$127,1; \$100; \$88,7 и \$78,7, могут быть получены подобным образом и равны соответственно 0,076; 0,373; 0,225 и 0,051.

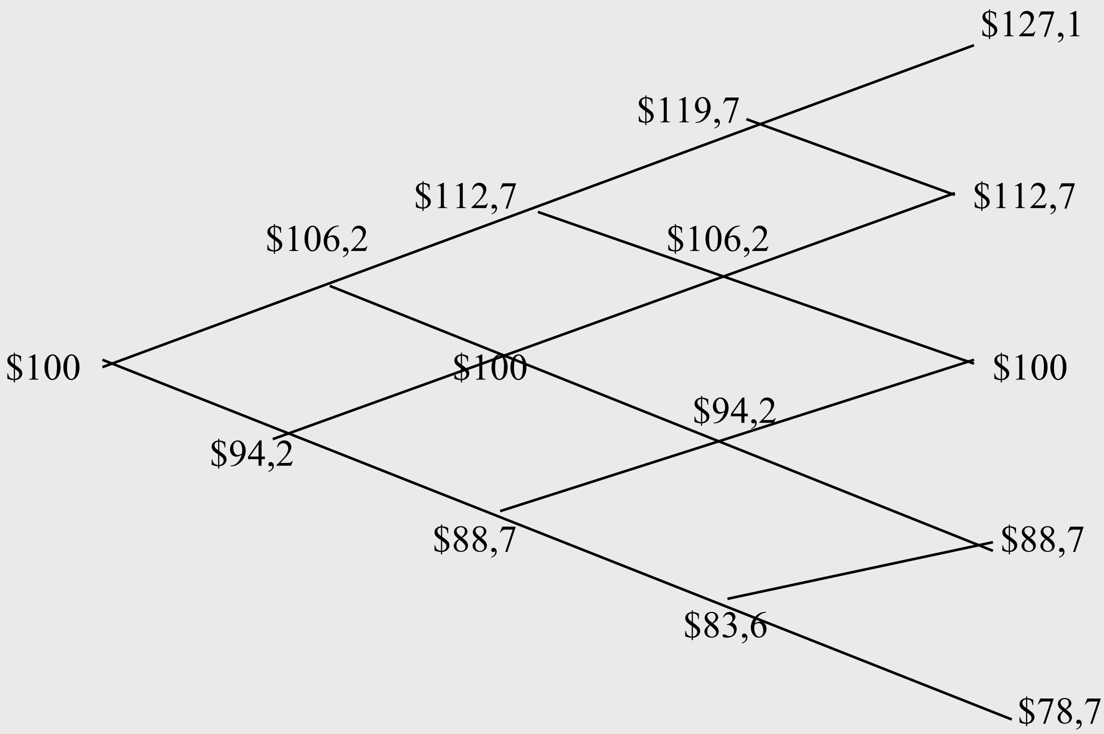


Рис. 3. Изменения цены акции за четыре периода в биномиальной модели примера 1

Несколько более точным способом определения параметров u , d и p является решение следующей системы уравнений:

$$pu + (1 - p)d = a\ ,$$

$$pu^2 + (1 - p)d^2 - a^2 = b^2\ ,$$

$$u\,d = 1\ ,$$

где a и b - среднее и дисперсия изменения цены акции за интервал времени Δt . Решением системы являются значения

$$u = \frac{1}{d} = \frac{\left(a^2 + b^2 + 1\right) + \sqrt{\left(a^2 + b^2 + 1\right)^2 - 4a^2}}{2a} \ ,$$

$$u = \frac{a-d}{u-d} \ .$$

При использовании этих формул нет необходимости считать, что $\Delta t \to 0$.

БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Рендлеман и Барттер (Rendleman & Bartter, 1980) сделали простые предположения относительно $\mu(r)$ и $\sigma(r)$ в уравнении

$$dr = \mu(r)\, dt + \sigma(r)\, dW(t).$$

Они предположили, что $\mu(r) = Mr$ и $\sigma(r) = Sr$, где M и S являются постоянными. Это означает, что процентная ставка r следует геометрическому броуновскому движению. Она имеет постоянную ожидаемую скорость роста M и постоянную волатильность S в среде, нейтральной к риску. Она может быть смоделирована путем применения биномиального дерева, подобного дереву, использованному для моделирования изменения цен акций. Параметры u, d и p выбираются следующим образом:

$$u = e^{S\sqrt{\Delta t}} \ , \ d = e^{-S\sqrt{\Delta t}} , \ \ p = \frac{a-d}{u-d} \ , \quad \text{где} \quad a = e^{M\Delta t} \ .$$

Пример 2. Чтобы проиллюстрировать метод, предположим, что $\Delta t = 1$ год, $M = 0{,}05$, $S = 0{,}15$ и мы хотим моделировать процентную ставку на пятилетнем периоде. Из этого следует, что $u = 1{,}1618$, $d = 0{,}8607$, $a = 1{,}0513$ и $p = 0{,}6329$. Так как временной шаг на дереве 1 год, мы определим краткосрочную процентную ставку r как одногодичную ставку. Если начальное значение r равно 10% годовых, получается дерево показанное на рис. 4. В начальный (нулевой) момент времени цена акции S является известной. В момент Δt имеется две возможных цены акции Su и Sd, в момент $2\Delta t$ – три возможности: Su^2, S, Sd^2, и т. д. В общем случае в момент времени $i\Delta t$ рассматривается $(i + 1)$ цен акций. Ими являются $S\,u^{\,j}\,d^{\,i-j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, i$. Заметим, что соотношение $u = 1/d$ используется при вычислении цены акции в каждом узле биномиального дерева. Например, $S\,u^2\,d = S\,u$.

Следует подчеркнуть, что биномиальное дерево, показанное на рис. 4, представляет изменения процентной ставки в среде, нейтральной к риску, а не в реальной среде.

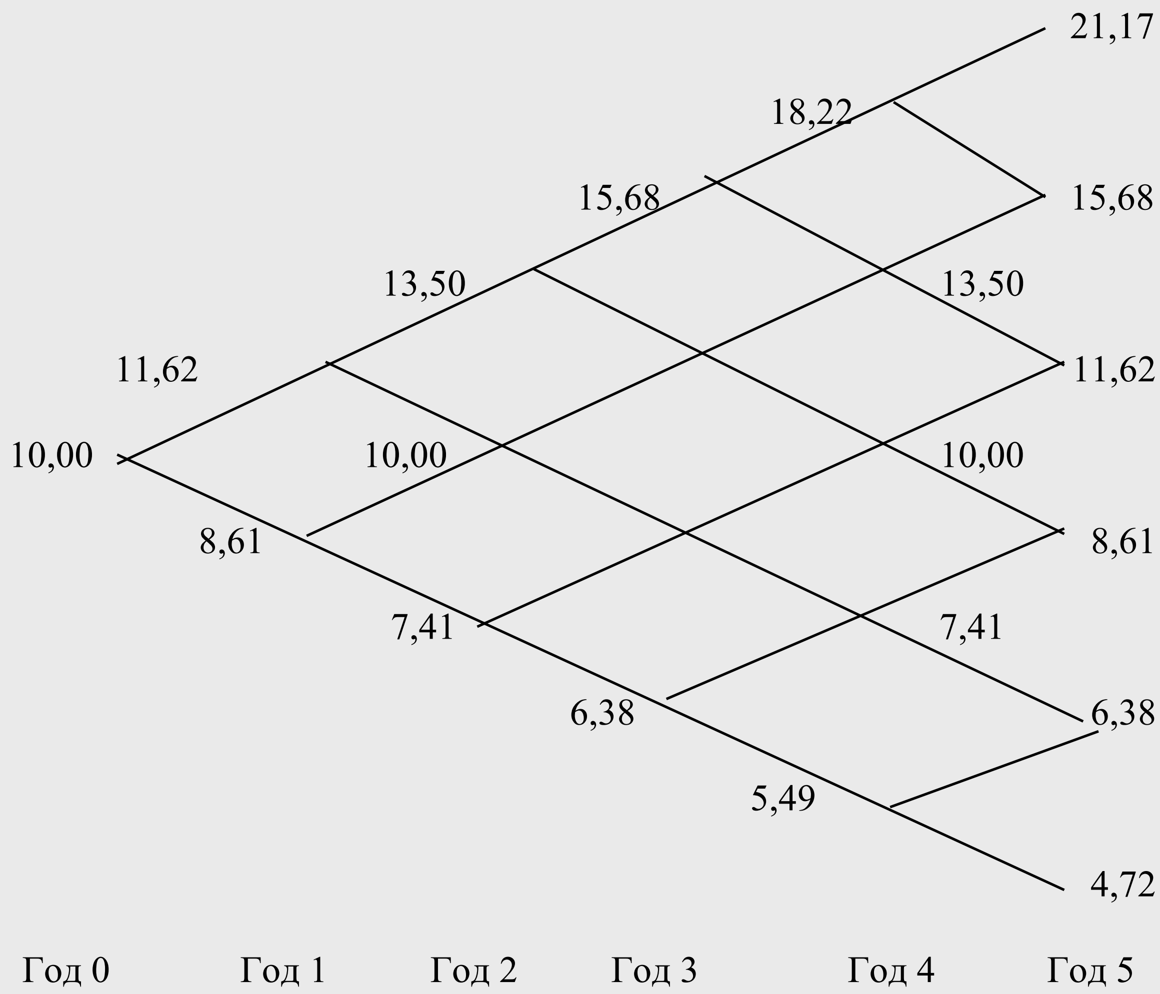


Рис. 4. Биномиальное дерево изменений процентной ставки в среде, нейтральной к риску, для модели Рендлемана и Барттера.

БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФИНАНСОВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Предположим, что мы хотим определить стоимость 4-летнего американского колл опциона на облигацию со сроком погашения 5 лет, по которой выплачиваются 8% купоны в конце каждого года и ее лицевая стоимость равна \$1000. Цена исполнения опциона равна \$1000. Первым шагом анализа является вычисление цены облигации в каждом узле дерева. Облигация стоит \$1000 в конце пятого года.

Стоимость облигации в более ранние времена может быть получена путем попятного движения через дерево. Определим $r_{ij} = r\,u^{j}\,d^{\,i-j}$ и P_{ij} как стоимость облигации в момент $t + i\Delta t$, когда процентная ставка равна r_{ij}. Из этого следует, что

$$P_{ij} = e^{-r_{ij}\Delta t}\,[pP_{i+1,\,j+1} + (1-p)P_{i+1,\,j} + c]\,,$$

где c является купонной суммой, выплачиваемой в конце каждого года. Рисунок 5 показывает результаты этих вычислений.

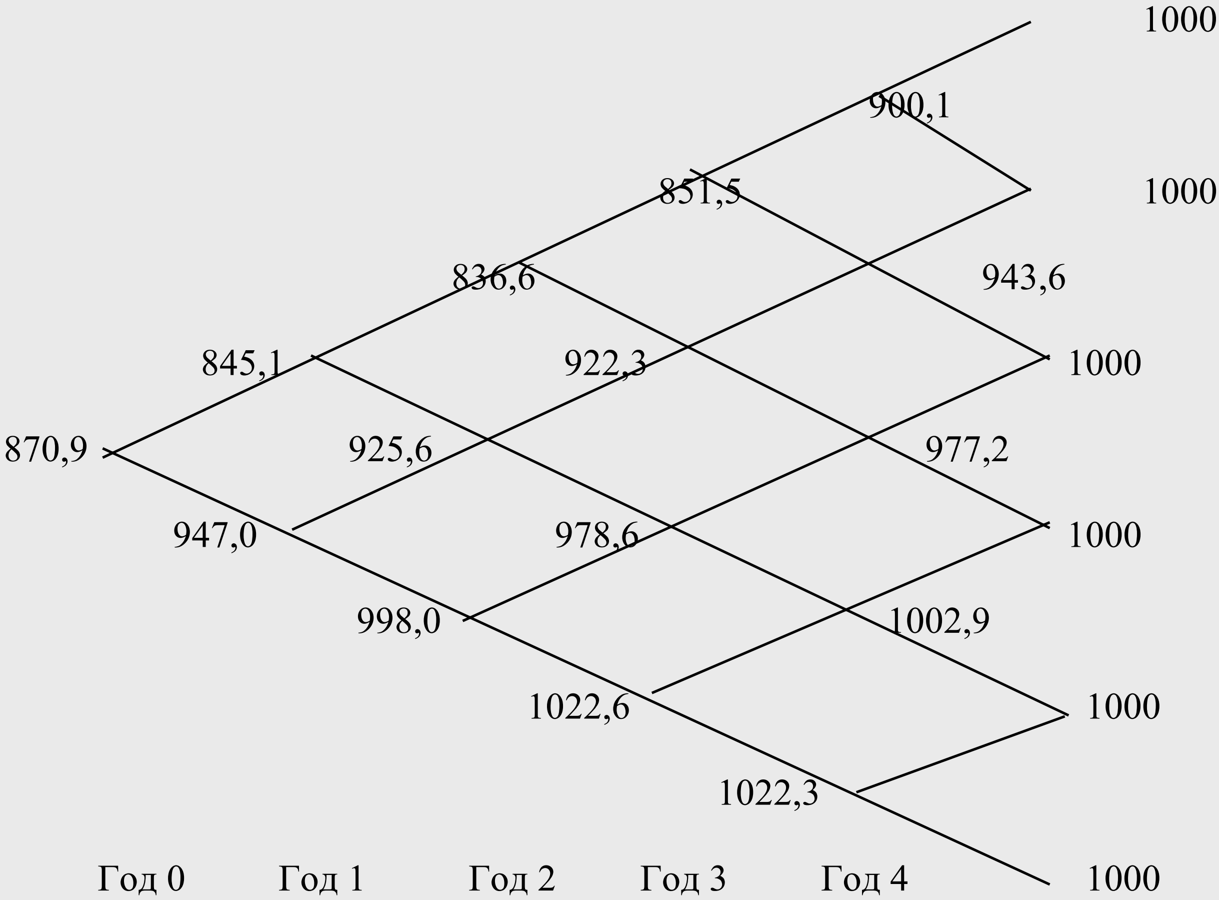


Рис. 5. Стоимости облигации в модели Рендлемана - Барттера

На следующем этапе дерево используется для вычисления цены опциона. Если f_{ij} означает стоимость опциона в момент времени $t + i\Delta t$, когда процентная ставка равна r_{ij},

$$f_{4,j} = \max\,[P_{4,j} - 1000,\ 0],$$

и, когда $i < 4$,

$$f_{ij} = \max\,[\,P_{ij} - 1000,\ \ e^{-r_{ij}\Delta t}(pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j})]\,.$$

Результаты этих вычислений показаны на рис. 6. Стоимость опциона равна \$1,05.

Заметим, что способ попятного движения через дерево процентных ставок аналогичен способу, который используется в деревьях цены акций. Главным различием является то, что в дереве процентных ставок процентные ставки, используемые для дисконтирования, изменяются от узла к узлу.

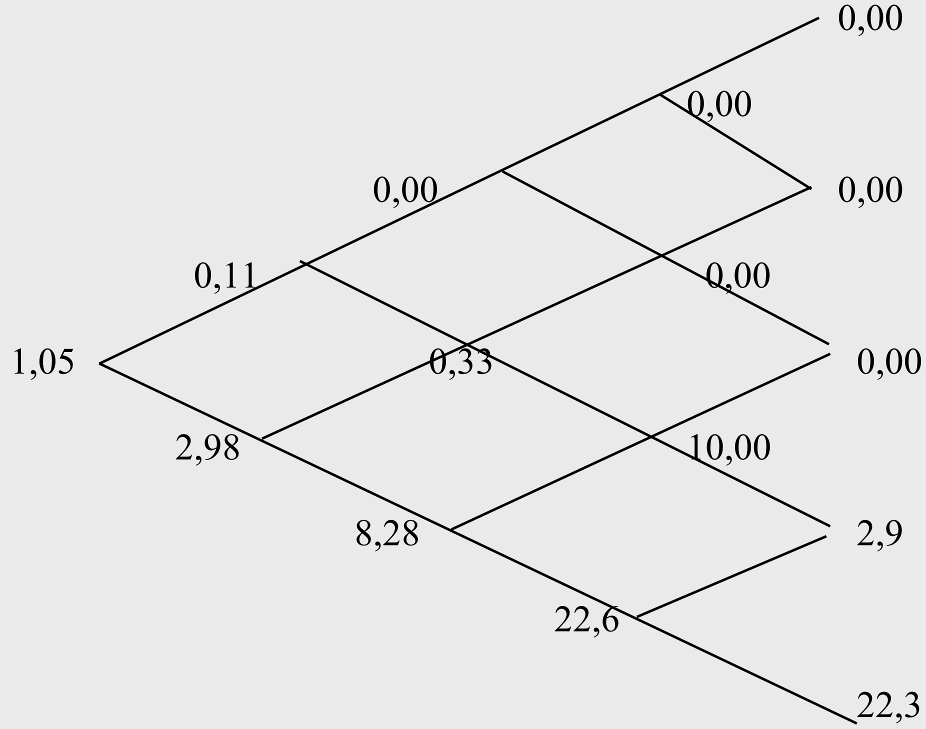


Рис. 6. Использование дерева модели Рендлемана-Барттера для определения стоимостей колл опциона на облигацию.

4.2 ПРИМЕНЕНИЕ ТРИНОМИАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

В этом разделе рассматриваются модели краткосрочной процентной ставки r, когда ее дрейф определяется некоторой неизвестной функцией времени. Мы покажем, как выбрать эту функцию так, чтобы модель обеспечивала точное согласование с исходной временной структурой процентной ставки, наблюдаемой на рынке.

ПРИСПОСОБЛЕНИЕ МОДЕЛИ К ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ

Сначала рассмотрим класс моделей, когда мгновенное стандартное отклонение r является константой. В этом случае уравнение краткосрочной процентной ставки имеет вид

$$dr = \mu(\theta(t), r, t)\, dt + \sigma\, dW(t),$$

где σ является константой, μ – известной функцией своих аргументов, но $\theta(t)$ является неизвестной функцией времени. Чтобы проиллюстрировать основы построения триномиального дерева (то есть дерева, в котором имеется три различных возможности перехода из одного узла в другие), сначала рассмотрим простейшую модель, которая соответствует модели непрерывного времени, описанной в разделе 2.1.

МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА

Напомним, что в модели Васичека краткосрочная процентная ставка следует стохастическому процессу с дрейфом $\mu(\theta(t), r, t) = k(\theta - r)$ и волатильностью σ, то есть удовлетворяет уравнению

$$dr = k(\theta - r)\,dt + \sigma\,dW(t).$$

Триномиальные деревья можно использовать для оценки опционов американских облигаций и других платежей, зависимых от процентных ставок, процесс изменения которых соответствует модели Васичека.

Величина r на дереве в момент 0 равна исходной краткосрочной ставке r_0. Значения r, рассматриваемые в других узлах, имеют вид $r_0 + k\Delta r$, где k являются положительными или отрицательными числами. Соотношение между Δr и временным шагом Δt равно $\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}$. Триномиальное дерево строится так, чтобы изменение r имело корректные среднее значение и стандартное отклонение на каждом временном интервале Δt. Такое дерево является более сложным, чем биномиальное дерево, рассмотренное в предыдущем разделе, в трех отношениях:

1. Имеется три ветви, исходящих из каждого узла, а не две.
2. Вероятности на ветвях различны в различных частях дерева.
3. Процесс ветвления предрасположен изменяться от узла к узлу.

Альтернативы процесса ветвления показаны на рис. 7.

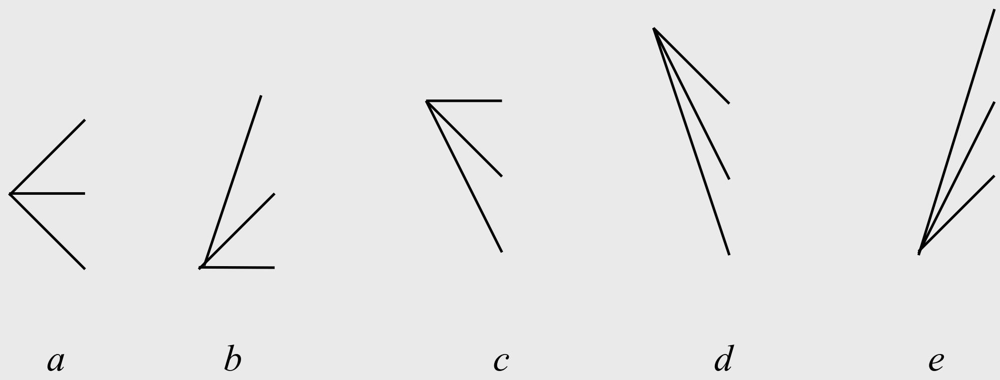


Рис. 7. Альтернативы процесса ветвления

Процесс ветвления представленный на рис. 7,a , будем называть нормальным процессом ветвления. Здесь имеются такие альтернативы: увеличение на Δr, отсутствие какого-либо изменения и уменьшение на Δr. Когда r оказывается большим, иногда необходимо использовать альтернативу 7,c , когда процентная ставка либо остается неизменной, либо уменьшается на Δr, либо уменьшается на $2\Delta r$. Если r становится очень большим, то возможные изменения сводятся только к уменьшению процентной ставки на Δr, $2\Delta r$ или $3\Delta r$ (см. рис. 7,d). Аналогично могут быть интерпретированы остальные альтернативы изменения процентной ставки на временном интервале Δt.

Рассмотрим узел в момент $i\Delta t$, когда $r = r_0 + k\Delta r$. Чтобы выбрать процесс ветвления, сначала вычислим ожидаемое значение r в момент $(i+1)\Delta t$ при условии, что мы начинаем движение из этого узла. Затем выберем значение k, которое делает $r_0 + k\Delta r$ как можно ближе к этому ожидаемому значению r, и строим дерево так, чтобы тремя возможными значениями r, которые могут быть достигнуты в момент $(i+1)\Delta t$ были бы $r_0 + (k+1)\Delta r$, $r_0 + k\Delta r$ и $r_0 + (k - 1)\Delta r$. Пусть дрейф r является таким, что ожидаемое изменение r через время Δt принимает значение между $-\Delta r/2$ и $+\Delta r/2$. Соответствующим этому случаю является нормальный процесс ветвления, представленный на рис. 7,b ; и т.д.

Пример. Чтобы проиллюстрировать построение дерева, предположим, что $k = 0{,}2$, $\theta = 0{,}125$ и $\sigma = 0{,}01$, так что

$$dr = 0{,}2(0{,}125 - r)\,dt + 0{,}01\,dW(t)$$

и мы хотим построить дерево с $\Delta t = 0{,}25$ года. Предположим, что r_0, начальное значение r, равно 0,05. В этом случае $\Delta r = 0{,}01\sqrt{3 \times 0{,}25} = 0{,}0087$. Рис. 8 показывает дерево, которое построено для первых трех интервалов времени.

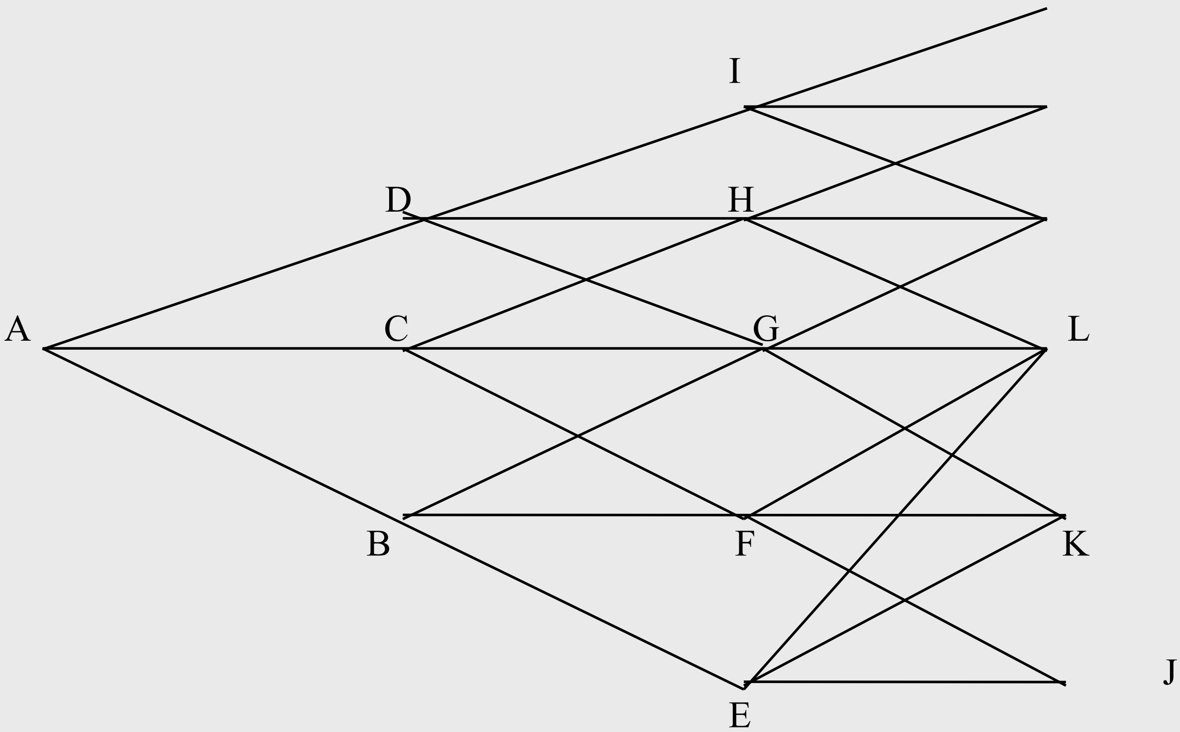


Рис. 8. Триномиальное дерево для первых трех интервалов времени

В начальном узле A $r = 0{,}05$. Ожидаемое изменение r через следующий временной интервал Δt равно $k(\theta - r)\Delta t = 0{,}00375$ и стандартное отклонение равно $0{,}01\sqrt{0{,}25} = 0{,}005$. Так как ожидаемое изменение лежит между $-\Delta r/2$ и $+\Delta r/2$, соответствующим процессом ветвления является нормальный и тремя возможными изменениями значения r через время Δt являются $-0{,}0087$, 0, $+0{,}0087$. Вероятности переходов по ветвям выбираются таким образом, чтобы дать точное значение и стандартное отклонение для изменений. Определим p_u, p_m и p_d как вероятности перехода по верхней, средней и нижней ветвям соответственно. Они должны удовлетворять уравнениям:

$$p_u + p_m + p_d = 1;$$

$$0{,}0087\, p_u - 0{,}0087\, p_d = 0{,}00375;$$

$$(0{,}0087)^2 p_u + (-0{,}0087)^2 p_d = 0{,}005^2 + 0{,}00375^2.$$

Решениями этих уравнений являются $p_d = 0{,}043$, $p_m = 0{,}483$ и $p_u = 0{,}474$. Вероятности переходов для всех других узлов вычисляются подобным образом.

Таблица 1

Узел	A	B	C	D	E	F	G	H	I
r %	5,00	4,13	5,00	5,87	3,26	4,13	5,00	5,87	6,74
p_u	0,474	0,521	0,474	0,428	0,039	0,521	0,474	0,428	0,385
p_m	0,483	0,439	0,483	0,525	0,439	0,439	0,483	0,525	0,561
p_d	0,043	0,040	0,043	0,047	0,040	0,040	0,043	0,047	0,054

В узле E процесс ветвления является нестандартным. Значение r в этом узле равно 0,0326 и ожидаемое изменение r через следующий временной интервал Δt составляет

$$k(\theta - r)\,\Delta t = 0{,}00462\,.$$

Как и в других узлах, стандартное отклонение изменения равно 0,005. Так как значение ожидаемого изменения лежит между $\Delta r/2$ и $3\Delta r/2$, то используемый вариант ветвления соответствует рис. 7,b . Тремя возможными изменениями значения r через следующий временной интервал Δt являются 0, $+0{,}0087$ и $+0{,}0174$. Вероятности p_u, p_m и p_d должны удовлетворять уравнениям:

$$p_u + p_m + p_d = 1;$$

$$0{,}0174\, p_u + 0{,}0087\, p_m = 0{,}00462;$$

$$(0{,}0174)^2 p_u + (0{,}0087)^2 p_m = 0{,}005^2 + 0{,}00462^2.$$

Решениями являются $p_d = 0{,}039$, $p_m = 0{,}453$ и $p_u = 0{,}508$.

Попятное движение по дереву осуществляется следующим образом. Как только дерево построено, цены всех облигаций в каждом узле можно вычислить по формуле

$$P(t,T) = \exp\{A(t,T) - r\,B(t,T)\}.$$

Процедура попятного движения через дерево подобна той, которая использовалась для биномиального дерева в модели Рендлемана – Барттера. Разница только в том, что дисконтированное ожидаемое значение в каждом узле должно вычисляться по трем возможным ветвям, а не по двум. Когда мы проходим обратно по дереву, то предполагаем, что процентная ставка в узле применяется для всех последующих временных шагов. Таким образом, если f_G , f_H и f_I являются стоимостями производных ценных бумаг в узлах G, H и I соответственно, тогда в предположении отсутствия досрочного исполнения стоимость в узле D равна

$$[0{,}428\,f_I + 0{,}525\,f_H + 0{,}047\,f_G]\,\exp\{-\,0{,}0587 \times 0{,}25\}.$$

В таких же обозначениях стоимость в узле E в предположении отсутствия досрочного исполнения равна

$$[0{,}039\,f_L + 0{,}453\,f_K + 0{,}508\,f_J]\,\exp\{-\,0{,}0326 \times 0{,}25\}.$$

Проверки на желательность досрочного исполнения следует делать так же, как и в биномиальных деревьях.

РАСШИРЕННАЯ МОДЕЛЬ ВАСИЧЕКА

Некоторым обобщением рассмотренной модели, который интересен из-за его аналитической разрешимости в явной форме, является так называемая расширенная модель Васичека

$$dr = \mu(\theta(t) - ar)\,dt + \sigma\,dz(t). \qquad (1)$$

В этом частном случае модели функция $\theta(t)$ может быть определена аналитически из временной структуры. При построении дерева способом, который мы будем использовать, в интервале времени между t и $t + \Delta t$ величина θ выбирается автоматически так, что она согласовывается с текущей форвардной ценой облигации.

Триномиальное дерево может быть использовано также для определения цены американских опционов и других более сложных ценных бумаг с помощью модели Халла и Уайта (1993). Геометрия дерева похожа на геометрию дерева, используемого в обычной модели Васичека. Однако имеется одно важное различие. Когда реализуется модель Васичека, процесс для r известен и дерево выбирается так, чтобы оно согласовывалось с процессом настолько точно, насколько это возможно. Здесь же имеется неизвестная функция $\theta(t)$ и процесс построения дерева частично предназначен для определения $\theta(t)$ так, чтобы стоимость всех дисконтируемых облигаций определялись точно.

Краткосрочная ставка r определяется как непрерывно конвертируемая доходность на дисконтированную облигацию, погашаемую через время Δt. Процентная ставка r может принимать на дереве значения, которые выражаются в виде $r_0 + j\Delta r$ для некоторого задаваемого определенным образом Δr, где r_0 – текущее значение r и j – положительное или отрицательное целое число. Рассматриваемые на дереве значения времени принимают значения, кратные некоторому промежутку Δt, имея вид $i\Delta t$, где i является неотрицательным целым числом. Переменные Δr и Δt должны быть выбраны так, чтобы Δr было между $\sigma\sqrt{3\Delta t}/2$ и $2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Как указывается в литературе по этому вопросу, имеются некоторые теоретические преимущества, чтобы выбирать $\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.

Для удобства узел на дереве, где $t = i\Delta t$ и $r = r_0 + j\Delta r$ ($i \geq 2$), будет обозначаться как (i,j). Используются также следующие обозначения:

$y(i)$ - доходность в момент 0 на дисконтированную облигацию, погашаемую в момент $i\Delta t$;

$r_j = r_0 + j\Delta r$;

μ_{ij} - дрейф процентной ставки r в узле (i, j);

$p_k(i, j)$, k = 1, 2, 3, - вероятности переходов в верхнее (1), среднее (2) и нижнее (3) состояния из узла (i, j);

$Q(i,j)$ - стоимость ценной бумаги, по которой выплачивается \$1, если достигается узел (i,j) , и 0 в остальных случаях.

Мы предполагаем, что дерево уже построено до момента $n\Delta t$ ($n \geq 0$), так что оно согласовано с $y(i)$ и показывает, как его можно распространить на один шаг далее. Так как процентную ставку r предполагается применять на временном периоде между $i\Delta t$ и $(i + 1)\Delta t$, дерево, построенное до момента $n\Delta t$, отражает значения $y(i)$ для $i \leq n + 1$. При построении ветвей, заключающих фрагмент дерева между моментами $n\Delta t$ и $(n + 1)\Delta t$, мы должны выбирать значения $\theta(n\Delta t)$ так, чтобы дерево согласовывалось с $y(n + 2)$. Формула, используемая для этого, имеет вид:

$$\theta(n\Delta t) = \frac{(n+2)y(n+2)}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} + \frac{1}{\Delta t^2} \ln \sum_j Q(n,j) e^{-2r_j\Delta t + ar_j\Delta t^2} .$$

<u>Доказательство.</u> Как было определено выше, $Q(i,j)$ является стоимостью ценной бумаги, которая выплачивает \$1, если достигается узел (i,j), и ничего в других случаях. $Q(i,j)$ могут быть вычислены до начала конструирования дерева по формуле

$$Q(i,j)=\sum_{j^*}Q(i-1,j^*)q(j^*,j)e^{-r_{j^*}\Delta t},$$

где $q(j^*,j)$ является вероятностью перехода из узла $(i-1,j^*)$ в узел (i,j) (для любого заданного j^* она не равна нулю только для трех j).

Как видно, стоимость облигации, погашаемой в момент $(n+2)\,\Delta t$, равна в узле (n,j) значению

$$e^{-r_j\Delta t}E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle|r(n)=r_j\right],$$

где E является оператором нейтрального к риску ожидания и $r(i)$ является значением r в момент $i\Delta t$. Стоимость в момент 0 дисконтированной облигации, погашаемой в момент $(n+2)\,\Delta t$, поэтому равна

$$e^{-(n+2)R(n+2)\Delta t}=\sum_j Q(n,j)e^{-r_j\Delta t}E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle|r(n)=r_j\right]. \tag{2}$$

Определим $\varepsilon(n,j)$ как значение $\{r(n+1)-r(n)\mid r(n)=r_j\}$, тогда

$$E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle|r(n)=r_j\right]=e^{-r_j\Delta t}\,E\left[e^{-\varepsilon(n,j)\Delta t}\right]. \tag{3}$$

Разлагая $e^{-\varepsilon(n,j)\Delta t}$ в ряд Тейлора, взяв математическое ожидание и пренебрегая членами порядка малости более высокого, чем Δt^2, имеем

$$E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle|r(n)=r_j\right]=e^{-r_j\Delta t}\left[1-\mu_{n,j}\Delta t^2\right]. \tag{4}$$

Так как дрейф краткосрочной ставки $\mu_{n,j}$ является известной функцией $\theta(n\Delta t)$, $\theta(n\Delta t)$ может быть определено из выражений (2) и (3). Например, в модели (1),

$$\mu_{n,j}=\theta(n\Delta t)-ar_j,$$

так что

$$\theta(n\Delta t)=\frac{\sum_j Q(n,j)e^{-2r_j\Delta t}\left(1+ar_j\Delta t\right)-e^{-(n+2)y(n+2)\Delta t}}{\sum_j Q(n,j)e^{-2r_j\Delta t}\Delta t}. \tag{5}$$

Опыт показывает, что значения $\theta(n\Delta t)$, получаемые из этого выражения, в большинстве случаев оказываются удовлетворительными. Они приводят к дереву, в котором цены дисконтированной облигации, вычисленные с помощью дерева в момент времени 0, совпадают с рыночными ценами, по крайней мере, в четырех значащих цифрах. Ошибки в формуле имеют тенденцию к взаимному сокращению. Например, если значение $\theta(n\Delta t)$ несколько меньше точного, то значение $\theta((n+1)\Delta t)$ стремится компенсировать ее, становясь немного больше. Если требуется лучшее согласие с исходной кривой доходности, можно использовать больше членов разложения в ряду Тейлора или может быть разработана рекуррентная процедура повышения точности.

В случае расширенной модели Васичека (1) , математическое ожидание в равенстве (3) вычисляется в явной форме:

$$E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle| r(n)=r_j\right]= e^{-r_j\Delta t}\, e^{\left[-\theta(n\Delta t)+ar_j+\sigma^2\Delta t/2\right]\Delta r^2} .$$

Используя (2) приходим к доказываемому выражению

$$\theta(n\Delta t)=\frac{1}{\Delta t}(n+2)y(n+2)+\frac{\sigma^2\Delta t}{2}+\frac{1}{\Delta t}\ln\sum Q(n,j)e^{-2r_j\Delta t+ar_j\Delta t^2} . \quad (6)$$

Оно является уточнением оценки (5) и приводит к дереву, которое дает цены дисконтированной облигации в момент времени 0 с точностью около восьми значащих цифр.

Как только $\theta(n\Delta t)$ определено, дрейф нормы $\mu_{n,j}$ для r в узлах, соответствующих моменту времени $n\Delta t$, вычисляем, используя формулу

$$\mu_{n,j}=\mu[\theta(n\Delta t), r_0+j\Delta r, n\Delta t].$$

Переходы, исходящие из узлов в момент $n\Delta t$ и ассоциированные с ними вероятности выбираются согласованно с $\{\mu_{n,j}\}$ и σ. Три узла, которые могут быть достижимы по переходам, исходящим из узла (n, j), такие

$$(n+1, k+1),\ (n+1, k) \text{ и } (n+1, k-1),$$

с значением k, выбранным так, чтобы r_k (величина r , достигаемая средним переходом) была по возможности ближе к $r_j+\mu_{n,j}\,\Delta t$ (ожидаемое значение r). Вероятности даются выражениями:

$$p_1(n,j)=\frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta r^2}+\frac{\eta^2}{2\Delta r^2}+\frac{\eta}{2\Delta r},$$

$$p_2(n,j)=1-\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta r^2}-\frac{\eta^2}{\Delta r^2},$$

$$p_3(n,j)=\frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta r^2}+\frac{\eta^2}{2\Delta r^2}-\frac{\eta}{2\Delta r},$$

где $\eta = \mu_{n,j}\Delta t + (j - k)\Delta r$. При условии, что Δr выбирается в интервале от $\sigma\sqrt{3\Delta t}\,/\,2$ до $2\sigma\sqrt{\Delta t}$, уже упоминавшимся выше, вероятности всегда будут между 0 и 1.

Рис. 9 иллюстрирует процедуру, показывающую дерево, которое конструируется для модели (1), когда $a = 0.1$, $\sigma = 0{,}014$ и $\Delta r = 1$. Временная структура предполагается с положительным наклоном доходностей дисконтированных облигаций, которые для сроков погашения 1, 2, 3, 4 и 5 лет равны 10 %, 10,5 %, 11 %, 11,25 % и 11,5 %, соответственно. Значениями, вычисленными для θ, являются: $\theta(0) = 0{,}0201$, $\theta(1) = 0{,}0213$, $\theta(2) = 0{,}0124$, $\theta(3) = 0{,}0175$.

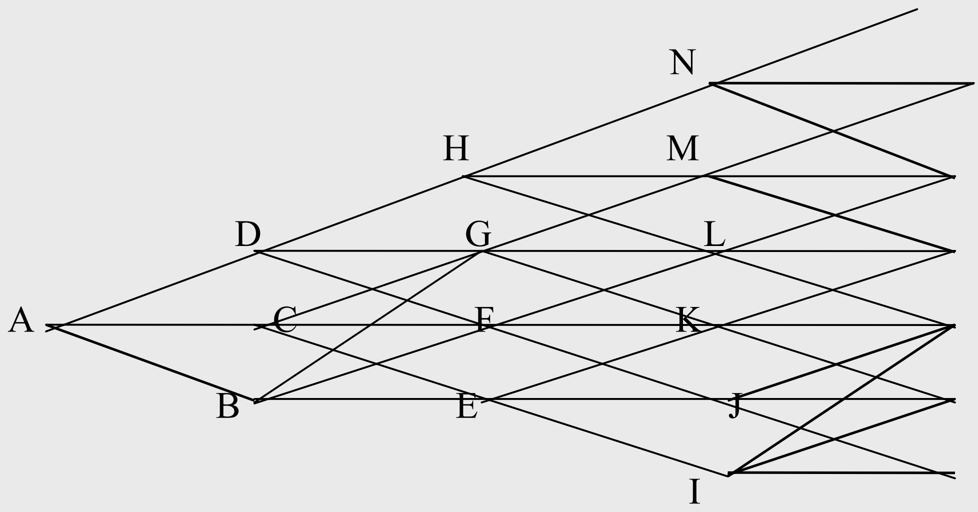


Рис. 9. Дерево, сконструированное для модели (1)

Модель для дерева взята в виде $dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma\, dW(t)$, численные значения параметров модели определены выше. Значения ставок и вероятностей переходов сведены в табл. 2.

Таблица 2

Таблица ставок и вероятностей.

Узел	A	B	C	D	E	F	G
Ставка	10,00	7,58	10,00	12,42	7,58	10,00	12,42
p_1	0,462	0,044	0,507	0,415	0,286	0,221	0,166
p_2	0,493	0,477	0,451	0,534	0,627	0,657	0,667
p_3	0,045	0,479	0,042	0,051	0,087	0,122	0,167

Узел	H	I	J	K	L	M	N
Ставка	14,85	5,15	7,58	10,00	12,42	14,85	17,27
p_1	0,121	0,042	0,455	0,370	0,293	0,228	0,171
p_2	0,657	0,426	0,499	0,570	0,623	0,654	0,667
p_3	0,222	0,532	0,046	0,060	0,084	0,118	0,162

Табл. 3 показывает результаты использования той же самой модели с постепенно уменьшающимися значениями Δt при вычисления цен одногодичных

Европейских опционов на 5-летние дисконтированные облигации. Так как цены этих опционов задаются аналитически, результаты обеспечивают проверку скорости сходимости процедуры. Таблица иллюстрирует сходимость предлагаемой процедуры для одногодичного колл опциона на пятилетнюю дисконтируемую облигацию, когда используется модель

$$dr = [\theta(t) - ar]dt + \sigma\, dW(t),$$

с параметрами $a = 0{,}1$ и $\sigma = 0{,}014$. Временная структура увеличивается линейно от 9,5% до 11% в течение первых трех лет и затем увеличивается линейно от 11% до 11,5% в течение следующих двух лет.

Таблица 3

Полное число интервалов времени	Цена исполнения *)				
	0,96	0,98	1,00	1,02	1,04
5	2,30	1,31	1,00	0,69	0,37
25	2,47	1,68	0,95	0,58	0,25
50	2,48	1,64	1,00	0,55	0,26
100	2,48	1,64	0,99	0,54	0,26
Аналитическое значение	2,48	1,64	0,99	0,53	0,26

*) Цена исполнения выражается как доля форвардной цены облигации.

Пример. Рис. 10 показывает дерево, которое построено для расширенной модели Васичека, иногда называемой моделью Халла –Уайта

$$dr = (\theta(t) - ar)\, dt + \sigma\, dz\,,$$

когда $a = 0{,}1$, $\sigma = 0{,}014$ и $\Delta t = 1$. Временная структура предполагается увеличивающейся функцией с доходностями дисконтируемых облигаций для сроков погашения 1, 2, 3, 4 и 5 лет, равными соответственно 10% , 10,5% , 11% , 11,25% и 11,5%. Значения ставок и вероятностей переходов сведены в табл. 4.

Таблица 4

Таблица ставок и вероятностей

Узел	A	B	C	D	E	F	G
r %	10,00	7,58	10,00	12,42	7,58	10,00	12,42
p_u	0,462	0,044	0,507	0,415	0,286	0,221	0,166
p_m	0,493	0,477	0,451	0,534	0,627	0,657	0,667
p_d	0,045	0,479	0,042	0,051	0,087	0,122	0,167

Узел	H	I	J	K	L	M	N
r %	14,85	5,15	7,58	10,00	12,42	14,85	17,27
p_u	0,121	0,042	0,455	0,370	0,293	0,228	0,171
p_m	0,657	0,426	0,499	0,570	0,623	0,654	0,667
p_d	0,222	0,532	0,046	0,060	0,084	0,118	0,162

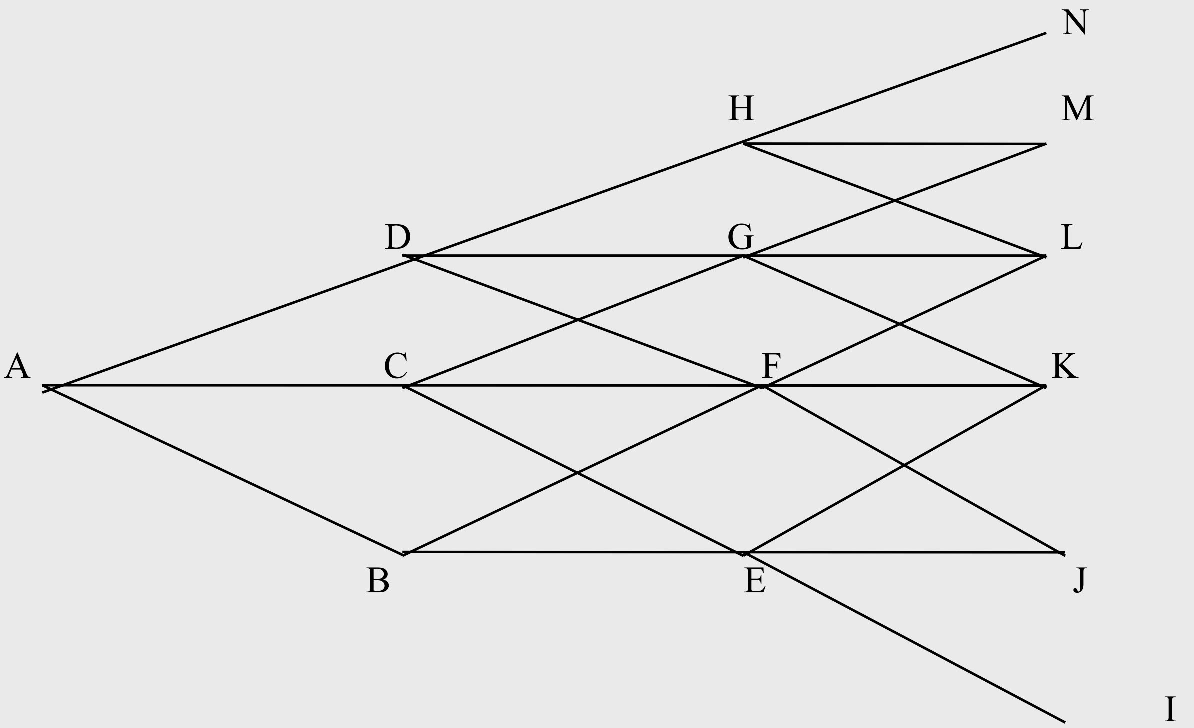


Рис. 10. Дерево для модели Халла-Уайта.

Первым шагом при построении дерева является вычисление $\theta(0)$. Так как $Q(0,0) = 1$, $r_0 = 0{,}1$ и $y(2) = 0{,}105$, формула для $\theta(n\Delta t)$, $n = 0$, дает начальное значение $\theta(0) = 0{,}0201$. По формуле для μ_{nj} вычисляем дрейф r в узле (0,0), он равен 0,0101. Среднее значение и стандартное отклонение r в узлах, которые могут быть достижимы из узла (0,0), поэтому равны 0,0101 и 0,014. Это приводит к вероятностям 0,045, 0,493 и 0,462 для первых трех ветвей на рис. 10. Формула для $Q(i,j)$ показывает, что $Q(1,-1)$, $Q(1,0)$ и $Q(1,1)$ равны соответственно 0,041, 0,446 и 0,418. Это завершает вычисления для первого временного шага. Формула для $\theta(n\Delta t)$, $n = 1$, теперь может быть использована снова для вычисления $\theta(\Delta t)$, которое оказывается равным 0,0213. Это приводит к вероятностям, показанным в табл. 4, которые соответствуют второму временному шагу на рис. 10 и приведены в столбцах B, C, D. Далее процедура повторяется и для третьего временного шага завершается вычислением вероятностей, показанных в столбцах E, F, G, H; и т. д.

ДРУГИЕ МОДЕЛИ

Только что рассмотренный подход может быть распространен на общий класс моделей

$$dr = \mu(\theta(t), r, t)dt + \sigma(r, t)dW(t), \qquad (7)$$

в которых мгновенное стандартное отклонение r может быть произвольной функцией r и t. Одним частным случаем уравнения (7), представляющим интерес, является

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma\sqrt{r}\,dW(t) \qquad (8)$$

Этот случай можно назвать вариантом расширенной CIR-модели.

Более общее семейство моделей, попадающих в класс (7), описывается уравнением

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma r^{\beta}dW(t), \qquad (9)$$

где β является константой. Когда $\beta = 0$, модель (9) сводится к модели (1); когда $\beta = 0{,}5$, она сводится к модели (8). Когда $\beta = 0$, модель может быть согласована с любой исходной временной структурой. Когда $\beta > 0$, r должно быть неотрицательным, чтобы стандартное отклонение r было хорошо определенным в том смысле, что, когда r стремится к нулю, дрейф r должен быть неотрицательным. Одним из последствий этого является то, что должно удовлетворяться условие $\theta(t) \geq 0$. Можно показать, что для $\beta > 0$ невозможно, чтобы модель удовлетворяла этому условию и согласовывалась с любой исходной временной структурой. В частности, временная структура не может быть согласована, когда мгновенная форвардная ставка $f(0,t)$ положительна, но ее производная $f_t(0,t)$ является отрицательной и для некоторых значений t большой по абсолютной величине. Укажем на два примера моделей, свободных от этого недостатка. Один из них – это логарифмически нормальная модель, которая является вариантом модели Блэка – Карасинского (Black & Karasinski, 1991)

$$d\ln r = (\theta(t) - a\ln r)dt + \sigma\,dW(t)\,.$$

Другим примером является еще одна расширенная CIR-модель ($\beta = 0.5$):

$$dr = r(\theta(t) - ar)dt + \sigma\sqrt{r}\,dW(t)\,.$$

Оказывается, что обе эти модели могут согласовываться с любой исходной временной структурой с $f(0,t) > 0$.

Существенное отличие модели (7) от рассмотренной выше модели (1) заключается в том, что волатильность модели (7) не является константой, а представляет собой функцию времени и процентной ставки. Поэтому использованный выше метод построения триномиального дерева непосредственно к ней применен быть не может. Однако небольшая модификация модели (7) может свести задачу построения триномиального дерева для нее к предыдущей задаче. Покажем, как это можно сделать. Для этого построим вспомогательный случайный процесс $x(r,t)$ с постоянной волатильностью. Пусть

$$x(r,t) = \sigma(r_0,0)\int_0^t \frac{dr(s)}{\sigma(r,t)} \ ,$$

$x(r,t)$ описывается уравнением

$$dx = [(\mu(\theta(t), r, t)u(r, t) + w(r, t)]dt + \sigma(r_0, 0)\, dW(t), \tag{10}$$

где

$$u(r, t) = \sigma(r_0, 0) \,/\, \sigma(r, t),$$

$$w(r,t) = -\frac{\sigma(r_0,0)}{2}\frac{\partial\, \sigma(r,0)}{\partial\, r} + \frac{\partial\, x}{\partial\, t}.$$

Теперь триномиальное дерево будем строить не для процесса $r(t)$, а для процесса $x(r,t)$, принимая расстояния между возможными значениями процесса x кратными Δx, которое является постоянным и равным $\sigma(r_0,0)\sqrt{3\Delta t}$. Предположим, что дерево построено до момента $n\Delta t$. Значение $\theta\,(n\Delta\, t)$ вычисляется также, как описано при построении расширенной модели Васичека, только теперь определяем r_j как значение r в узле (i, j), определенном для x, для которого временная переменная принимает значение $i\Delta t$, а сам процесс принимает значение $x_0 + j\Delta x$. Ветвление процесса x между моментами $n\Delta t$ и $(n + 1)\Delta t$ рассчитывается согласно формуле (10) при помощи использования той же самой процедуры, которая описана для r при рассмотрении расширенной модели Васичека.

СОГЛАСОВАНИЕ МОДЕЛИ С ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ДАННЫМИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Рассмотрим модели для r, которые определяются двумя функциями времени $\theta\,(t)$ и $\phi\,(t)$ и могут быть согласованы как с исходной параметрической структурой процентной ставки так и с исходными данными волатильности. Предполагается, что исходные данные содержат волатильности доходностей дисконтированных облигаций, оцененные по историческим данным.

Важно подчеркнуть, что разрабатываемые здесь модели имеют волатильность, совпадающую с волатильностью доходностей на дисконтированные облигации только в начальный момент. Нет никакой гарантии, что реализация волатильности доходности дисконтированной облигации в более позднее время будет похожей на реализацию в исходный момент. В общем случае немарковской модели необходимо иметь некоторые конкретные реализации во все время, если требуются волатильности доходностей на дисконтированные облигации. Опыт показывает, что они иногда сильно отличаются. Модели, такие как (9), являются более робастными. Хотя они не позволяют согласовать точно волатильности в исходный момент, они имеют то преимущество, что дают приближения к стационарным структурам волатильности. Когда $\beta = 0$ или $\beta = 0{,}5$ в уравнении (9), волатильность $v(t, T)$ является известной функцией $(T - t)$ и r. В общем случае для моделей, подобных моделям, описываемым (9), структура волатильности является стационарной в том смысле, что $v(t, T)$ может зависеть только от $(T - t)$ и временной структуры в момент t.

Одна модель, включающая функции времени $\theta(t)$ и $\phi(t)$ имеет вид:

$$dr = (\theta(t) - \phi(t)r)dt + \sigma r^{\beta} dW(t). \tag{11}$$

Ей свойственно то же самое общее преимущество, которым обладает модель (9). Другая модель, предложенная Блэком и Карасинским (Black & Karasinski, 1991), описывается уравнением

$$d\ln r = (\theta(t) - \phi(t)\ln r)dt + \sigma dW(t)$$

В целях общности предположим

$$dr = \mu\big(\theta(t), \phi(t), r, t\big)\, dt + \sigma(r, t)\, dW(t) \tag{12}$$

Как и ранее, используем преобразованную переменную x, чье мгновенное стандартное отклонение является постоянным. Для удобства вычислений, немного изменим геометрию дерева. Дерево принимается биномиальным при описании переходов на первом временном интервале и триномиальным в последующем . В течение первого шага движение к одному из двух первых узлов (обозначим их U и D) по обоим направлениям считаем равновероятными. Определим:

r_u, r_d - значения r соответственно в узлах U и D.

x_u, x_d - значения x соответственно в узлах U и D.

$y_u(i)$,$y_d(i)$ - доходности соответственно в узлах U и D , на дисконтированную облигацию, погашаемую в момент $i\,\Delta t$.

μ_u, μ_d – дрейф ставки r соответственно в узлах U и D.

$V(i)$ - волатильность доходности в начальный момент на дисконтированную облигацию, погашаемую в момент $i\,\Delta t$.

Будем считать, что в отличие от значений x на дереве, как определялось выше, значения x_u и x_d не обязательно определяются как $x(r_0, 0) + j\Delta x$ для некоторого целого j . Однако значения x , рассматриваемые в момент $n\Delta t$, когда $n > 1$, имеют такой вид.

Первым шагом построения этого дерева является определение $y_u(i)$ и $y_d(i)$ для всех $i \geq 1$. Они должны быть согласованы с известными значениями $y(i)$ так, чтобы

$$e^{-r_0\Delta t}\left[0{,}5e^{-(i-1)R_u(i)\Delta t}+0{,}5e^{-(i-1)R_d(i)\Delta t}\right]=e^{-iR(i)\Delta t}. \quad (13)$$

Они должны также согласовываться с известными значениями $V(i)$. Так как $V(i)\sqrt{\Delta t}$ является стандартным отклонением распределения натурального логарифма доходности на дисконтируемую облигацию, погашаемую в момент времени $i\Delta t$,

$$V(i)\sqrt{\Delta t}=\frac{1}{2}\ln\frac{y_u(i)}{y_d(i)}. \quad (14)$$

Равенства (13) и (14) можно разрешить относительно $R_u(i)$ и $R_d(i)$, используя какую-либо численную процедуру, например процедуру Ньютона – Рафсона. Так как $y_u(2)$ и $y_d(2)$ равны соответственно r_u и r_d, решение уравнений (13) и (14) для $i = 2$ определяет два узла в момент Δt.

Дерево строится с момента Δt вперед, используя подход, аналогичный описанному для расширенной модели Васичека. Мы имеем две функции времени $\theta(t)$ и $\phi(t)$. Они выбираются так, чтобы быть согласованными с $y_u(i)$ и $y_d(i)$ при помощи процедуры приспособления как к временной структуре процентных ставок, так и к текущей структуре волатильности. Опишем эту процедуру.

Предположим, что дерево построено до момента $n\Delta t$. Определим:

$Q_u(i,j)$ - стоимость в узле U ценной бумаги, предусматривающей выплату \$1 , если узел (i,j) достигается, и нулю в других случаях.

$Q_d(i,j)$ - стоимость в узле D ценной бумаги, предусматривающей выплату \$1 , если узел (i,j) достигается, и нулю в других случаях.

Предполагается, что $Q_u(i,j)$ и $Q_d(i,j)$ известны для $i \leq n$. Как и в случае приспособления только к временной структуре при построении дерева для расширенной модели Васичека, эти функции могут быть вычислены до начала построения дерева.

Аналогично равенствам (2), когда $n \geq 2$, в узлах U и D стоимости облигаций, погашаемых в момент времени $(n + 2)\Delta t$, даются выражениями

$$e^{-(n+1)R_u(n+2)\Delta t}=\sum_j Q_u(n,j)e^{-r_j\Delta t}E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle|r(n)=r_j\right] \quad (15)$$

и

$$e^{-(n+1)R_d(n+2)\Delta t}=\sum_j Q_d(n,j)e^{-r_j\Delta t}E\left[e^{-r(n+1)\Delta t}\middle|r(n)=r_j\right] \quad (16)$$

соответственно.

Равенство (4) все еще справедливо. В этом случае $\mu_{i,j}$ является известной функцией как $\theta(n\Delta t)$ так и $\phi(n\Delta t)$. Поэтому использование равенства (4) совместно с выражениями (15) и (16) дает систему двух уравнений для определения $\theta(n\Delta t)$ и $\phi(n\Delta t)$. Для модели (11) уравнения являются линейными относительно этих неизвестных:

$$\theta(n\Delta t)\sum_j Q_u(n,j)e^{-2r_j\Delta t}\Delta t^2 - \phi(n\Delta t)\sum_j Q_u(n,j)e^{-2r_j\Delta t}r_j\Delta t^2 =$$

$$= \sum_j Q_u(n,j)e^{-2r_j\Delta t} - e^{-(n+1)R_u(n+2)\Delta t},$$

$$\theta(n\Delta t)\sum_j Q_d(n,j)e^{-2r_j\Delta t}\Delta t^2 - \phi(n\Delta t)\sum_j Q_d(n,j)e^{-2r_j\Delta t}r_j\Delta t^2 =$$

$$= \sum_j Q_d(n,j)e^{-2r_j\Delta t} - e^{-(n+1)R_d(n+2)\Delta t}.$$

Ветвящийся процесс определяется так же, как при рассмотрении расширенной модели Васичека, с учетом особенности изменения процентной ставки на дереве в интервале времени между Δt и $2\Delta t$.

Пример. Рис. 11 иллюстрирует описанную процедуру, показывая дерево, которое получается для модели

$$dr = [\theta(t) - \phi(t)\, r\,]\, dt + \sigma r^{\beta}\, dW(t), \tag{17}$$

когда $\sigma = 0{,}14$, $\beta = 1$ и $\Delta t = 1$ год. Временная структура процентных ставок предполагается равной 10% годовых. Волатильности одногодичной, двухлетней, трехлетней, четырехлетней и пятилетней ставок предполагаются равными соответственно 13%, 12%, 11%, 10% и 9% за год. Значениями, вычисленными для θ и ϕ, являются $\theta(1) = 0{,}0165$, $\theta(2) = 0{,}0193$, $\theta(3) = 0{,}0244$, $\phi(1) = 0{,}164$, $\phi(2) = 0{,}190$, $\phi(3) = 0{,}241$. Значения ставок и вероятностей переходов для рис. 11 приведены в табл. 5

Таблица 5

Таблица ставок и вероятностей

Узел	A	D	U	B	C	E	F	G	H	I	J
Ставка	10,00	8,810	11,20	7,850	10,00	12,74	6,160	7,850	10,00	12,74	16,24
p_1	0,500	0,042	0,411	0,282	0,154	0,088	0,047	0,321	0,153	0,074	0,045
p_2	0,500	0,450	0,537	0,629	0,666	0,627	0,506	0,605	0,665	0,606	0,494
p_3		0,508	0,052	0,089	0,180	0,285	0,447	0,074	0,162	0,320	0,461

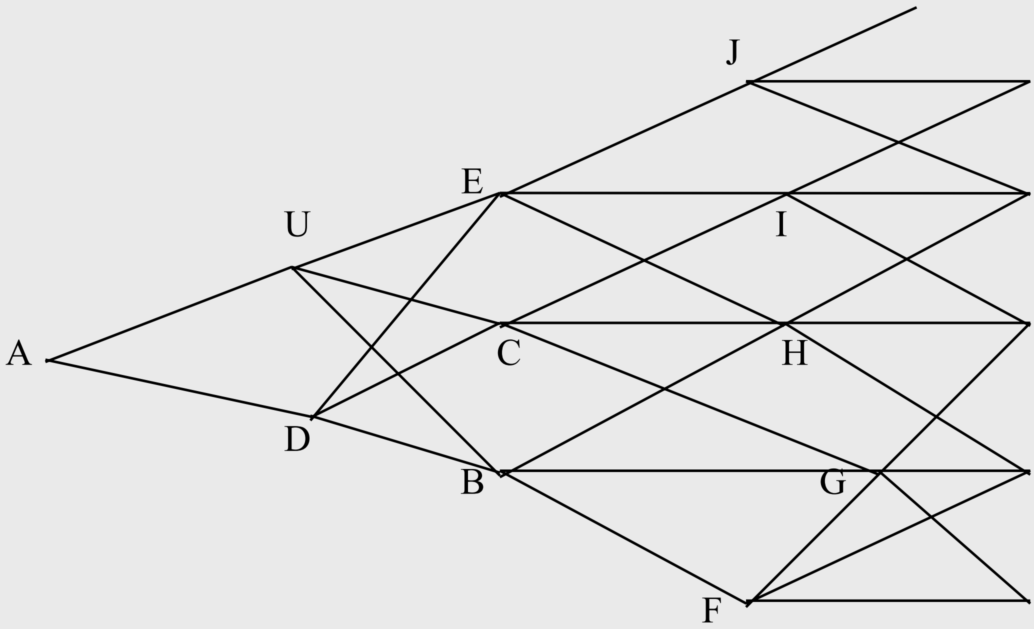


Рис. 11. Дерево для модели (17)

ИЗМЕНЕНИЕ ДЛИНЫ ВРЕМЕННОГО ШАГА

Для большинства однофакторных моделей процентных ставок аналитический вид цены облигаций как функции краткосрочной ставки не известен. Только расширенная модель Васичека является моделью, когда цены облигаций известны в аналитической форме. В расширенной CIR-модели (8) цена облигаций выражается через интеграл, не вычисляемый в явной аналитической форме. Опыт показывает, что в вычислительных целях для определения цен облигаций в расширенной CIR-модели проще строить триномиальное дерево, чем оценивать этот интеграл численно. Поэтому когда оцениваются опционы облигаций, дерево процентных ставок должно строиться на временной промежуток, равный сроку погашения облигации. Это создает проблему при определении цены краткосрочного опциона на долгосрочную облигацию. Δt, используемое во время действия опциона, обычно значительно меньше, чем требуемое для периода времени между моментом истечения опциона и датой погашения облигации. Например, когда оценивается трехмесячный опцион на 10-летнюю облигацию, может быть использовано приблизительно 50 временных шагов, каждый длительностью 0,005 года, в течение первых трех месяцев и 39 шагов длительностью 0,25 года каждый в течение остающихся 9,75 года. Покажем, как можно изменять Δt в такой ситуации.

Предположим, что в момент τ требуется изменить длительность временных шагов с Δt_1 на Δt_2. Новый временной шаг длительностью Δt_2 предполагается равным целому числу, умноженному на старый шаг Δt_1. Дерево строится с помощью временных шагов длительностью Δt_1 до момента $\tau + \Delta t_2$, как описано выше. Как только вычисления произведены, дерево, построенное между моментом τ и моментом $\tau + \Delta t_2$, не используется, поскольку после момента τ дерево строится с временными шагами длительностью Δt_2. Выбирается также и новое Δx, увеличенное в $\sqrt{\Delta t_2 / \Delta t_1}$ раз по сравнению с использовавшимся ранее. В момент $\tau + \Delta t_2$ одна из рассматриваемых краткосрочных ставок может выбираться произвольно. Остальные определяются новым Δx.

4.3 МОДЕЛЬ ХО – ЛИ

В рассмотренных ранее дискретных моделях состояние определялось как пара чисел, одним из которых был момент времени, а другим - либо дискретизированное значение моделируемого процесса (процесса краткосрочной ставки или цены актива), либо дискретизированное значение некоторой функции от этого процесса. В модели, предложенной Хо и Ли (Ho & Lee, 1986), в качестве состояния принимается тоже пара, но в этой паре одним элементом является момент времени, как и в предыдущих моделях, а другим элементом является вся временная структура процентных ставок в этот текущий момент времени. Таким образом, состояние определяется не значением процентной ставки или цены актива, а совокупностью процентных ставок или цен актива для всех сроков погашения. Такое определение состояния автоматически согласовывает исходную временную структуру с моделью и позволяет использовать полную информацию о временной структуре для определения цены активов Рассмотрим детали построения и анализа такой модели.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

При построении модели используются следующие предположения:

a) Рынок является бесконфликтным. Не имеется никаких налогов, никакой стоимости совершения сделок и все ценные бумаги полностью делимы.

b) Рынок торгует в дискретные моменты времени, которые разделены одинаковыми временными интервалами. Для простоты считается, что каждый используемый период длится одну единицу времени. Рассматривается дисконтированная облигация со сроком погашения T, когда на облигацию выплачивается $1 в конце T-го периода без каких-либо других платежей ее владельцу.

c) Рынок является полным. Существует дисконтированная облигация для каждой даты погашения n ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

d) В каждый момент n имеется конечное число состояний среды. Для состояния i мы обозначим равновесную цену дисконтированной облигации со сроком погашения T через $P_i^{(n)}(T)$. Заметим, что $P_i^{(n)}(T)$ является функцией, которая связывает цену дисконтированной облигации со сроком ее погашения. Эту функцию будем называть *функцией дисконтирования*. В контексте модели функция дисконтирования полностью описывает временную структуру процентных ставок i-го состояния в момент n.

Функция дисконтирования $P_i^{(n)}(T)$ должна удовлетворять ряду условий. Она должна быть положительной, поскольку представляет стоимости активов. Мы потребуем также, чтобы

$$P_i^{(n)}(0) = 1 \qquad \text{для всех } i,\ n. \tag{1}$$

$$\lim_{T\to\infty} P_i^{(n)}(T) = 0 \qquad \text{для всех } i,\ n. \tag{2}$$

Равенство (1) показывает, что дисконтированная облигация, погашаемая мгновенно, должна стоить \$1. Уравнение (2) говорит, что дисконтированная облигация с датой погашения в отдаленном будущем должна иметь незначительную стоимость. Предположения a – d являются предположениями стандартного *совершенного рынка капитала* (*perfect capital market*) в схеме дискретных времени и состояний.

БИНОМИАЛЬНАЯ РЕШЕТКА

Теперь опишем эволюцию временной структуры. Сначала мы наблюдаем функцию дисконтирования $P(T)$. В начальный момент по соглашению существует состояние 0, следовательно, мы имеем

$$P(T) = P_0^{(0)}(T). \tag{3}$$

Считается, что в момент 1 функция дисконтирования может быть определена двумя возможными способами – $P_1^{(1)}(T)$ и $P_0^{(1)}(T)$ (верхний индекс обозначает время, а нижний индекс – состояние). Поэтому имеется только два возможных состояния среды в момент 1. Когда предпочитается $P_1^{(1)}(T)$, мы говорим, что достигается верхнее состояние; когда предпочитается $P_0^{(1)}(T)$, достигается нижнее состояние.

Далее рассмотрим второй период – от момента 1 до момента 2. Мы позволяем каждой функции дисконтирования, в верхнем или нижнем состояниях, достигать только одной из двух возможных функций. Конкретно, при условии достижения функции дисконтирования $P(T)$ вида $P_1^{(1)}(T)$ в момент 1, мы требуем, чтобы функция дисконтирования была или $P_2^{(2)}(T)$, или $P_1^{(2)}(T)$ в момент 2. В этом месте мы не определяем какого-либо конкретного функционального вида для $P_2^{(2)}(T)$ или $P_1^{(2)}(T)$. Подобным образом, при условии достижения функции дисконтирования $P(T)$ нижнего состояния в момент 1, функция дисконтирования может достигать верхнего или нижнего состояния, превращаясь соответственно в функции $P_1^{(2)}(T)$ или $P_0^{(2)}(T)$. Заметим, что предположение биномиальной решетки требует, чтобы функция дисконтирования, достигая сначала верхнего состояния, а потом нижнего, была бы такой же, если бы она достигла сначала нижнего состояния, а потом верхнего.

Стохастический процесс функции дисконтирования в последовательные периоды описывается аналогично. Для $(n + 1)$-го периода между моментами n и $(n + 1)$ пусть $P_i^{(n)}(T)$ обозначает функцию дисконтирования в момент n после i изменений вверх и $(n - i)$ изменений вниз. Будем считать, что функция дисконтирования зависит только от числа изменений вверх, а не от последовательности, в которой они встречались. Таким образом, биномиальный процесс в момент n определяется диаграммой

$$\begin{array}{lll} & \nearrow & P_{i+1}^{(n+1)}(\cdot) \quad \text{верхнее состояние} \\ P_i^{(n)}(\cdot) & & \\ & \searrow & P_i^{(n+1)}(\cdot) \quad \text{нижнее состояние} \end{array} \tag{4}$$

Функция дисконтирования определяется для каждого момента n и состояния i. Это множество функций дисконтирования образует биномиальную решетку. Узел этой решетки определяется парой (n, i). Заметим, что для каждого момента n имеется точно $(n + i)$ состояний $(i = 0, \ldots, n)$. Временная структура может развиваться от некоторого исходного узла к какому-либо конечному различными путями, но это не влияет на значения функции дисконтирования в конечном узле пути. Таким образом, считается, что функции дисконтирования не зависят от траектории.

Часто более удобно представлять временную структуру через кривую доходности как альтернативу функции дисконтирования $P(T)$. Определим кривую доходности выражением

$$y(T) = -[\ln P(T)] / T , \tag{5}$$

где $y(T)$ является непрерывно конвертируемой доходностью дисконтированной облигации со сроком погашения T.

БИНОМИАЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС ЦЕН ОБЛИГАЦИИ

Когда временная структура эволюционирует в рамках биномиальной решетки, цена каждой дисконтированной облигации должна следовать биномиальному процессу с размером шага, зависящим от времени. В частности, рассмотрим дисконтированную облигацию со сроком погашения N. Первоначально цена облигации равна по определению $P(N)$.

После первого периода срок погашения облигации укорачивается до $(N - 1)$ и поэтому, задавая функции дисконтирования в верхнем и нижнем состояниях, мы можем определить цены облигации; они равны $P_1^{(1)}(N - 1)$ и

$P_0^{(1)}(N-1)$ соответственно в верхнем и нижнем состояниях. Все последующие цены определяются аналогично. В частности, после N периодов значениями облигаций будут $P_i^{(N)}(0)$ для всех состояний i ($i = 0, 1, \ldots, N$). Заметим, что, согласно равенству (1), стоимость облигации равна \$1 при ее погашении.

Стохастический процесс изменения цен дисконтированной облигации описывается следующим образом. Функция дисконтирования в биномиальной решетке определяется для каждого состояния и для каждого момента времени. При $T = 0$ функция дисконтирования всегда равна 1. Для каждого $T > 0$ она больше по своим значениям в верхнем состоянии и меньше по значениям в нижнем состоянии, то есть для всяких $n > 0$, $i > j$ и $T > 0$ имеет место неравенство $P_i^{(n)}(T) > P_j^{(n)}(T)$. Теперь рассмотрим трехпериодную облигацию. Сначала ее значение равно $P(3)$. В момент 1 она становится двухпериодной облигацией и ее стоимость может быть или $P_1^{(1)}(2)$, или $P_0^{(1)}(2)$. В момент 2 эта облигация становится одноопериодной облигацией и ее стоимость не может отличаться намного от единицы в любом состоянии среды и должна превращаться в единицу при погашении.

Эта модель стохастического процесса цены облигации подобна биномиальному процессу, рассмотренному в разделе 4.1. Однако имеется два основных отличия. Во-первых, при определении цен активов, зависящих от процентных ставок, в большинстве случаев в этой модели интересуются тем, как цены дисконтированных облигаций с различными сроками погашения изменяются одна по отношению к другой. Вот почему внимание концентрируется на биномиальной решетке временной структуры, а не на биномиальном процессе цены конкретной облигации. Во-вторых, в рассматриваемой модели величина изменения цены является зависимой от времени, чтобы гарантировать, что стоимость облигации сходится к 1 при погашении.

Используя метод биномиальной решетки, мы гарантируем, что стохастический процесс цены облигации имеет следующие характеристики. Неопределенность цены облигации является малой в двух крайних точках: вблизи настоящего времени и вблизи даты погашения облигации. Неопределенность цены больше для моментов времени вдали от этих двух крайних точек. Теперь рассмотрим конкретную облигацию. Когда временной горизонт увеличивается, неопределенность конфигурации временной структуры возрастает, приводя к увеличению дисперсии цены облигации. Однако в то же самое время с увеличением временного горизонта срок погашения облигации укорачивается, и влияние погашения увеличивается. Когда временной горизонт достаточно удален, последний эффект может доминировать над предыдущим, приводя к уменьшению неопределенности цены облигации. В рассматриваемой модели эти два эффекта разделяются и моделируются отдельно.

ИЗМЕНЕНИЯ СТАВКИ, СВОБОДНОЙ ОТ АРБИТРАЖА. ФУНКЦИИ ВОЗМУЩЕНИЯ

После описания биномиальной решетки временной структуры введем необходимые ограничения на изменения временной структуры, такие, чтобы изменение согласовывалось со средой, свободной от арбитража. Мы также введем некоторые упрощающие ограничения, такие, чтобы разработать процедуру построения «желательного» изменения временной структуры.

В произвольный n-й период в i-м состоянии мы имеем функцию дисконтирования $P_i^{(n)}(T)$. Если каждый участник рынка не ощущает никакого риска процентной ставки в следующем периоде, тогда временная структура в верхнем состоянии и в нижнем состоянии должна быть одинакова в момент $n + 1$. Далее, функция дисконтирования должна быть согласована с форвардной функцией дисконтирования $F_i^{(n)}(T)$, чтобы избежать каких-либо арбитражных возможностей. То есть

$$F_i^{(n)}(T) = P_i^{(n+1)}(T) = P_{i+1}^{(n+1)}(T) = P_i^{(n)}(T+1)/P_i^{(n)}(1), \quad T = 0, 1, 2, \ldots \quad (6)$$

В детерминированной среде если функция дисконтирования следующего периода отличается от $F_i^{(n)}(T)$, тогда инвесторы могут реализовать арбитражную прибыль. Поэтому при моделировании временной структуры в условиях неопределенности нас будет интересовать, как возмущается функция дисконтирования от предполагаемой форвардной функции в следующем периоде. По этой причине мы определяем две функции, которые назовем *функциями возмущения* (*perturbation functions*), $h(T)$ и $h^*(T)$, такие, что при переходе в верхнее состояние

$$P_{i+1}^{(n+1)}(T) = h(T)\ P_i^{(n)}(T+1)/P_i^{(n)}(1) \quad (7)$$

и при переходе в нижнее состояние

$$P_i^{(n+1)}(T) = h^*(T)\ P_i^{(n)}(T+1)/P_i^{(n)}(1). \quad (8)$$

Функции возмущения определяют отклонения функций дисконтирования от предполагаемых форвардных функций. Таким образом, грубо они определяют разность между ценами верхнего и нижнего состояния в следующем периоде. Когда $h(T)$ значительно больше единицы для всех значений T, тогда все цены облигаций будут существенно увеличиваться в верхнем состоянии. Аналогично, когда $h^*(T)$ меньше, чем единица для всех значений T, все цены облигации будут уменьшаться в нижнем состоянии. Уравнения (1) и (2) налагают следующие условия на функции h и h^*. Они должны быть обе положительными и также

$$h(0) = h^*(0) = 1 \qquad (9)$$

Уравнение (9) следует непосредственно из уравнений (1), (7) и (8).

Воздействие на цену облигации зависит от срока погашения, и мы поэтому полагаем h и h^* функциями от T. Для окончательного построения биномиальной решетки изменения временной структуры нам нужно только определить функции возмущения $h(T)$ и $h^*(T)$ и исходную функцию дисконтирования $P(T)$.

БИНОМИАЛЬНАЯ ПСЕВДОВЕРОЯТНОСТЬ

При построении биномиальной решетки изменения временной структуры необходимо гарантировать, чтобы не было арбитражной прибыли, которая могла бы быть получена формированием портфелей дисконтированных облигаций. Конкретно, если мы возьмем любые две дисконтированные облигации с различными сроками погашения и составим портфель этих двух облигаций так, чтобы он реализовывался со свободным от риска доходом в течение следующего периода, то свободная от риска процентная ставка должна быть доходом однопериодной дисконтированной облигации. Это условие отсутствия арбитража налагает ограничения на функции возмущения в каждом узле (n, i). Анализ показывает, что когда цена облигации при переходе в верхнее состояние увеличивается значительно, уменьшение цены облигации при переходе в нижнее состояние должно быть соизмеримым настолько, чтобы взвешенное среднее изменений было одинаковым по облигациям всех сроков погашения. Конкретно мы имеем

$$\pi h(T) + (1 - \pi)\, h^*(T) = 1 \qquad \text{для } n,\ i > 0\ , \qquad (10)$$

где π - некоторая константа, не зависящая от срока погашения T и исходной функции дисконтирования $P(T)$, но, возможно, зависящая от состояния i и времени n . Величину π будем называть *биномиальной псевдовероятностью* (*implied binomial probability*).

<u>Доказательство.</u> В любой момент n и в любом состоянии i мы можем сконструировать портфель из одной дисконтированной облигации с датой погашения T и ξ дисконтированных облигаций со сроком погашения t . Для упрощения наших обозначений мы опустим все индексы (n, i). Тогда стоимость портфеля будет равна $V = P(T) + \xi P(t)$.

В конце периода, когда реализуется переход в верхнее состояние, стоимость портфеля равна по уравнению (7)

$$V(\text{верхнего состояния}) = [\, P(T)h(T-1) + \xi P(t)h(t-1)] \,/\, P(1). \qquad (11)$$

Подобным образом, когда реализуется переход в нижнее состояние,

$$V(\text{нижнего состояния}) = [\, P(T)h^*(T-1) + \xi P(t)h^*(t-1)] \,/\, P(1). \quad (12)$$

Выберем ξ таким, чтобы V(верхнего состояния) = V(нижнего состояния); тогда, используя равенства (11) и (12), мы сможем показать, что

$$\xi = P(T)[\, h(T-1) - h^*(T-1)] \,/\, P(t)[\, h^*(t-1) - h(t-1)]\,. \qquad (13)$$

Для устранения арбитражных возможностей, этот портфель должен давать однопериодную отдачу дисконтированной облигации $1/P(1)$. То есть

$$P(T)h^*(T-1) + \xi P(t)h^*(t-1) = P(T) + \xi P(t)\,. \qquad (14)$$

Подставляя значение ξ в виде (13) в уравнение (14), мы получим

$$\begin{aligned} &[1 - h^*(T-1)]/[\, h(T-1) - h^*(T-1)] = \\ &= [1 - h^*(t-1)]/[\, h(t-1) - h^*(t-1)] \qquad \text{для всех } T \text{ и } t > 0. \end{aligned} \qquad (15)$$

Равенство (15) может иметь место для всех T и t, только если имеется постоянная π, не зависимая от T и t, такая, что

$$[1 - h^*(T)]/[\, h(T) - h^*(T)] = \pi\,. \qquad (16)$$

Уравнение (16) может быть переписано как

$$\pi h(T) + (1-\pi)h^*(T) = 1 \qquad \text{для} \qquad T = 0, 1, 2, \ldots \qquad (17)$$

Это завершает доказательство. Заметим, что по равенству (9) должно иметь место $h^*(0) = h^*(0) = 1$, что согласуется с уравнением (17).

Биномиальную псевдовероятность можно интерпретировать в контексте определения цены актива в биномиальной модели. Действительно, уравнение (10) можно переписать так:

$$P_i^{(n)}(T) = (\pi\, P_{i+1}^{(n+1)}(T-1) + (1-\pi)\, P_i^{(n+1)}(T-1)\,)\, P_i^{(n)}(1)\,. \qquad (18)$$

Уравнение (11) показывает, что цена облигации со сроком погашения T в момент времени n в состоянии i равна «ожидаемой» стоимости, которую облигация со сроком погашения $(T - 1)$ будет иметь в момент времени $(n + 1)$, дисконтированной с помощью процентной ставки состояния i, если мы интерпретируем π как биномиальную вероятность в смысле раздела 4.1. Это объясняет название этого параметра модели. Чтобы дальше интерпретировать π, лучше переписать уравнение (18) так:

$$\pi = (r - u) \,/\, (u - d),$$

где r отдача однопериодной облигации, а u и d являются отдачей облигации для верхнего и нижнего состояний соответственно. Обозначения (r, u, d) имеют тот же смысл, что и аналогичные обозначения в разделе 4.1. В нашем случае

$$r = 1 / P_i^{(n)}(1), \quad u = P_{i+1}^{(n+1)}(T-1) \ / P_i^{(N)}(T), \quad d = P_i^{(n+1)}(T-1) \ / P_i^{(N)}(T).$$

Тогда написанное выше выражение, полученное также в разделе 4.1, последует прямо из равенства (11). Следовательно, π измеряет степень отдачи нижнего состояния как процент максимальной разности между отдачей верхнего и нижнего состояний. Для больших π модель показывает, что изменение цены для следующего периода будет главным образом уменьшением цены. Подобным образом, когда π является малым, изменение цены более вероятно в сторону увеличения. Уравнение (10) показывает, что если арбитраж дисконтированной облигации невозможен, то это отношение должно быть одинаковым для всех облигаций.

УСЛОВИЕ НЕЗАВИСИМОСТИ ОТ ТРАЕКТОРИИ

При построении биномиальной решетки мы предполагаем, что функция дисконтирования, эволюционируя от одного состояния к другому, зависит только от числа изменений цены в сторону увеличения и не зависит от того, в какой последовательности они встречаются. Это ограничение эквивалентно наложению ограничения на функции возмущения h и h^* и биномиальную псевдовероятность π такого, что в любой момент времени n в любом состоянии движение цены облигации вверх следует за ее движением вниз также часто, как движение этой цены вниз следует за ее движением вверх.

Чтобы исследовать применение этих ограничений, рассмотрим функцию дисконтирования $P_i^{(n)}(T)$ в момент n в состоянии i. Используя уравнения (7) и (8) и прямое вычисление, мы получим, что от движения цены вверх, а потом ее движения вниз получим

$$P_{i+1}^{(n+2)}(T) = \left(P_i^{(n)}(T+2)/P_i^{(n)}(2)\right)\left(h(T+1)h^*(T)/h(1)\right). \qquad (19)$$

Подобным образом вычисляем для случая движения цены облигации сначала вниз, а потом ее движения вверх

$$P_{i+1}^{(n+2)}(T) = (P_i^{(n)}(T+2)/P_i^{(n)}(2))\,(h^*(T+1)h(T)\,/\,h^*(1)). \qquad (20)$$

Условие независимости от траектории подразумевает, что значения цен (19) и (20) должны быть одинаковыми, откуда мы получаем равенство

$$h(T+1)h^*(T)h^*(1) = h^*(T+1)h(T)h(1)\ . \qquad (21)$$

Но с помощью соотношения (10) h^* можно исключить, тогда получим

$$h(T+1)(1-\pi h(T))(1-\pi h(1)) = (1-\pi)h(1)\,h(T)\bigl(1-\pi h(T+1)\bigr). \quad (22)$$

Запишем равенство (22) для $T \geq 1$ в виде, более удобном для анализа:

$$\frac{1}{h(T+1)} = \frac{\delta}{h(T)} + \gamma \ , \quad (23)$$

где δ является константой такой, что

$$h(1) = 1 / \bigl(\pi + (1-\pi)\delta\bigr) \quad (24)$$

и

$$\gamma = \pi(h(1) - 1) / \bigl((1 - \pi)\, h(1)\bigr) \ . \quad (25)$$

Уравнение (23) является линейным разностным уравнением первого порядка относительно функции $h(T)$, и его общее решение имеет вид

$$h(T) = 1 / (\pi + c\delta^T),$$

где c – константа. Но равенство (9) налагает условие $h(0) = 1$ и, следовательно, это начальное условие определяет единственное решение:

$$h(T) = (\pi + (1 - \pi)\delta^T), \qquad T \geq 0. \quad (26)$$

Заметим, что равенство (24) становится частным случаем формулы (26).

Из уравнения (10) мы получаем

$$h^*(T) = \delta^T / (\pi + (1 - \pi)\delta^T) \ . \quad (27)$$

Для заданных констант π и δ модель Хо-Ли полностью определяется уравнениями (7), (8), (26) и (27).

СООТНОШЕНИЕ С ДРУГИМИ МОДЕЛЯМИ

Сравним модель Хо–Ли с другими моделями процессов изменения процентной ставки. Формулы (26) и (27) показывают, что модель Хо–Ли определяется единственным образом через две константы π и δ. Выше дано интуитивное объяснение π. Величина δ определяет различие между двумя функциями возмущения h и h^*. Чем больше различие, тем больше изменчивость процентной ставки. $h(T)$ является выпуклой функцией, которая увеличивается монотонно с ростом T, приближаясь асимптотически к $1/\pi$, а $h^*(T)$ является выпуклой функцией, которая монотонно уменьшается до нуля. Рассмотрим в рамках этой модели облигацию со сроком погашения T в каждом состоянии – времени. Отношение верхнего состояния цены облигации к предполагаемой форвардной цене равно $h(T)$, поэтому чем дольше срок погашения, тем больше изменение цены. Для краткосрочных облигаций изменение цены обратно пропорционально δ. Для долгосрочных облигаций изменение цены является практически постоянным для всех сроков погашения и равно $(1/\pi)$, а δ является параметром, который влияет на волатильность облигаций и обратно пропорционален к неопределенности временной структуры. Из равенства (24) следует, что $0 \le \delta \le 1$. Когда $\delta = 1$, мы имеем детерминированный случай.

В разделе 2 были рассмотрены равновесные модели временной структуры. В этих моделях цены всех дисконтированных облигаций определяются относительно стохастической краткосрочной ставки таким образом, чтобы на рынке дисконтированных облигаций не имелось арбитражных возможностей, так как модель Хо–Ли требует также, чтобы цены всех облигаций определялись относительно однопериодной облигации и, следовательно, относительно конкретной процентной ставки. Покажем теперь в явной форме, как цены облигаций определяются относительно краткосрочной ставки, и как модель Хо–Ли может быть сопоставлена с моделями с единственной переменной состояния, рассматривавшимися в разделе 2.

Краткосрочная ставка в модели Хо–Ли является ставкой однопериодной дисконтированной облигации. Мы хотим определить стохастический процесс краткосрочной ставки. Во-первых, нам нужно выразить функцию дисконтирования в любой момент времени n и любом состоянии i через исходную функцию дисконтирования. Это может быть достигнуто применением формул (7) и (8) рекуррентно в обратном направлении. Эта процедура дает окончательное выражение:

$$P_i^{(n)}(T) = \frac{P(T+n)}{P(n)} \prod_{k=i}^{n-1} \left(\frac{h^*(T+i)}{h^*(i)} \right) \prod_{k=1}^{i-1} \left(\frac{h(T+k)}{h(k)} \right) h(T). \qquad (28)$$

Используя формулу (27), выражение (28) можно упростить к виду

$$P_i^{(n)}(T) = \frac{P(T+n)}{P(n)} h(T) \delta^{T(h-1)} \prod_{k=1}^{h-1} \left(\frac{h(T+k)}{h(k)} \right). \qquad (29)$$

Формула (29) дает точное выражение функции дисконтирования в каждом состоянии – времени. В частном случае однопериодной облигации ($T = 1$) цена облигации равна

$$P_i^{(n)}(1) = \frac{P(n+1)\delta^{n-i}}{P(n)\left(\pi + (1-\pi)\delta^n\right)}. \tag{30}$$

Однопериодная ставка доходности $y_i^{(n)}(1)$ (при $T = 1$ она совпадает с краткосрочной процентной ставкой $r_i^n(1)$) согласно уравнению (5) равна

$$y_i^{(n)}(1) = -\ln P_i^{(n)}(1) = \ln\left(\frac{P(n)}{P(n+1)}\right) + \ln\left(\pi\delta^{-n} + (1-\pi)\right) + i\ln\delta. \tag{31}$$

До сих пор мы не определяли вероятности переходов между узлами биномиальной решетки. Если мы предположим, что вероятность перехода в верхнее состояние на биномиальной решетке одинакова для всех узлов и равна q, то из этого прямо следует, что для каждого n однопериодная ставка $r_i^n(1)$ имеет биномиальное распределение по i со средним μ:

$$\mu = \ln\left(\frac{P(n)}{P(n+1)}\right) + \ln\left(\pi\delta^{-n} + (1-\pi)\right) + nq\ln\delta. \tag{32}$$

Объединяя два последних слагаемых, получаем

$$\mu = \ln\left(\frac{P(n)}{P(n+1)}\right) + \ln\left(\pi\delta^{-(1-q)n} + (1-\pi) + \delta^{qn}\right). \tag{33}$$

Дисперсия дается выражением

$$\mathrm{Var} = nq(1-q)(\ln\delta)^2. \tag{34}$$

Заметим, что первое слагаемое в уравнении (33) является предполагаемой форвардной ставкой однопериодной облигации. Уравнение (33) показывает, что ожидаемая ставка равна предполагаемой форвардной ставке плюс некоторое смещение. Смещение, естественно, исчезло бы, если бы не имелось никакой неопределенности ($\delta = 1$). Дисперсия однопериодной ставки зависит только от δ. Как и ожидалось, дисперсия обратно «пропорциональна» к δ.

Эта переформулировка позволяет сравнить модель Хо–Ли с однофакторными моделями временной структуры, представленными в главе 2. В модели Хо–Ли стохастический процесс краткосрочной ставки зависит от информации об исходной временной структуре. В этом смысле временная структура привлекает полную информацию о начальной временной структуре. Путем сравнения однофакторные модели задают изменения краткосрочной ставки экзогенно без использования полной информации об исходной временной структуре. В связи с этим, как следует из главы 2, чтобы приспосабливать их к исходной временной структуре, приходится разрабатывать специальные процедуры.

Эти два способа построения моделей отличаются, поскольку преследуют различные цели. Однофакторные модели "ищут" внутрисистемную равновесную временную структуру. Чтобы сделать это, они "пытаются" определить такой процесс краткосрочной ставки, который мог бы порождать имеющую смысл равновесную временную структуру. В модели Хо–Ли исходная временная структура берется как заданная и изменения краткосрочной ставки определяются так, чтобы определить цены облигаций. Когда цены дисконтированных облигаций, рассматриваемые как случайные платежи, зависимые от процентной ставки, определяются путем изменения временной структуры, они согласовываются с исходной функцией дисконтирования. (Это утверждение будет доказано ниже.) Поэтому изменение временной структуры в модели Хо–Ли не используется для определения равновесной временной структуры. Более точно, это утверждается, чтобы согласовать с временной структурой, и используется для определения цены других случайных платежей, зависимых от процентной ставки.

СВОЙСТВА МОДЕЛИ ХО –ЛИ

Для улучшения понимания модели Хо–Ли полезно рассмотреть изменения функции дисконтирования через сдвиги кривой доходности. Для этого мы рассмотрим уравнение (5). В начальный момент

$$y(T) = -\,[\ln P(T)]\,/\,T.$$

В следующем периоде в верхнем состоянии, используя уравнение (7), мы имеем

$$y_1^{(1)}(T) = -\frac{1}{T}\ln\frac{P(T+1)}{P(1)} - \frac{1}{T}\ln\left[h(T)\right] \tag{35}$$

В нижнем состоянии, используя равенство (8), получаем

$$y_0^{(1)}(T) = -\frac{1}{T}\ln\frac{P(T+1)}{P(1)} - \frac{1}{T}\ln\left[h^*(T)\right]. \tag{36}$$

Рассматривая поведение функций $h(T)$ и $h^*(T)$, мы видим, что модель Хо–Ли налагает определенные ограничения на изменения кривой доходности. Когда краткосрочные ставки достигают высокого (низкого) уровня, долгосрочные ставки также достигают высокого (низкого) уровня. Изменения делаются относительно воображаемой кривой доходности. Так как воображаемая форвардная кривая доходности может принимать любую форму (в модели не накладывается каких-либо условий на исходную временную структуру), кривая доходности в последовательные периоды, в принципе, может принимать какую угодно форму.

ГИПОТЕЗА ЛОКАЛЬНЫХ ОЖИДАНИЙ И ПРЕМИЯ СРОКА

По определению, Т-периодной *премией срока* (*term premium*) является превышение ожидаемой доходности Т-периодной облигации (доходности от владения облигацией в течение одного периода) над доходностью одноопериодной облигации. Можно предполагать, что долгосрочные облигации дают более высокие ожидаемые доходы и, следовательно, положительные премии срока. Когда все облигации имеют одинаковую ожидаемую доходность (т. е. никакой премии срока не существует), мы говорим, что выполняется *гипотеза локального ожидания*. Следующее утверждение определяет премию срока и конкретизирует необходимые условия для гипотезы локального ожидания.

Премия Т-периодного срока дается равенством

$$\tau(T) = \frac{1}{P(1)}\left\{\left[\frac{(1-q)\delta^T + q}{(1-\pi)\delta^T + \pi}\right] - 1\right\}, \tag{37}$$

и гипотеза локального ожидания выполняется если и только если $q = \pi$, т.е. если и только если биномиальная псевдовероятность π равна биномиальной вероятности переходов q.

Доказательство**.** Заметим, что ставка доходности $(T+1)$-периодной облигации по одному периоду равна

$$\left[q\frac{P(T+1)}{P(1)}h(T) + (1-q)\frac{P(T+1)}{P(1)}h^*(T)\right]\Big/ P(T+1)$$

Ставка доходности одноопериодной облигации равна $1/P(1)$. Беря разность этих двух ставок, мы получим желаемый результат в виде формулы (37). Очевидно, что из этого следует, что премия равна нулю, если и только если $q = \pi$.

Премия Т-периодного срока равна произведению двух сомножителей. Первым сомножителем является одноопериодная свободная от риска норма прибыли. Второй сомножитель – это функция от q, π и δ. Если биномиальная вероятность q больше, чем биномиальная псевдовероятность π, мы имеем положительную премию срока. В этом случае долгосрочные облигации давали бы более высокие ожидаемые доходы. Это интуитивно ясно. π можно рассматривать как нейтральную к риску вероятность. Если реальная вероятность q для верхнего состояния больше, чем π, тогда ожидаемое возмещение должно быть больше, чем нейтральное к риску возмещение, следовательно, премия срока – положительная. В противном случае, если q меньше, чем π, премия срока отрицательная. Более важно то, что, когда π является биномиальной вероятностью, гипотеза локальных ожиданий должна выполняться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНЫ АКТИВОВ ПРИ СЛУЧАЙНОЙ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКЕ

Рассмотрим процедуру определения цены активов при случайной норме процента, использующую модель Хо–Ли. Для того, чтобы представить процедуру определения цены яснее, ограничим наше рассмотрение только определением цены активов, зависимых от процентной ставки (*interest rate contingent claim*). Эти ценные бумаги характеризуются следующим образом.

Пусть C будет активом, зависящим от процентной ставки. Мы потребуем, чтобы его цена $C(n, i)$ была единственным образом определена в каждом узле (n, i) биномиальной решетки. C имеет конечный срок действия и истекает (или погашается) в момент T платежом, равным $\{f(i)\}$, $0 \le i \le T$; мы назовем $\{f(i)\}$ конечным условием и, следовательно,

$$C(T, i) = f(i),\ 0 \le i \le T. \tag{38}$$

Считается, что цены активов удовлетворяют также ограничениям путем задания их верхней $U(n, i)$ и нижней $L(n, i)$ границ, так что

$$L(n, i) \le C(n, i) \le U(n, i). \tag{39}$$

Неравенства (39) определяют граничные условия. В момент n в состоянии i ценная бумага рассматриваемого типа обеспечивает случайную выплату $X(n, i)$ своему владельцу, $1 \le n \le T$.

Имеется много примеров активов, принадлежащих к этой категории. Это фьючерсы процентной ставки (учитывая маркировку рынка), как европейский, так и американский опционы, отзываемые облигации и облигации погасительного фонда, опционы на фьючерсы процентной ставки. Названные финансовые инструменты различаются спецификацией их конечных и граничных условий и выплат в течение их срока действия. Векселя с плавающей ставкой являются примером, который не принадлежит к этой категории, поскольку в каждом конкретном времени-состоянии (n, i), купонная ставка векселя зависит от того, как изменялась временная структура. Поэтому плавающая стоимость в каждом узле определяется неоднозначно. Однако с соответствующими поправками к процедуре оценивания модель Хо–Ли все же может быть использована для определения цены и этих инструментов.

Следующее утверждение является основным в процедуре определения цены при использовании модели Хо–Ли. Оно определяет формулу определения цены, нейтральной к риску.

Рассмотрим некоторый актив, зависимый от процентной ставки, $C(n,i)$, который может быть куплен или продан в бесконфликтной рыночной обстановке, описанной предположениями a – d (см. начало раздела). Если никакой арбитражной прибыли не может быть реализовано при владении любым портфелем рассматриваемых активов и дисконтированных облигаций, должно иметь место следующее равенство:

$$C(n,i) = \{\pi [\, C(n+1,i+1) + X(n+1,i+1)] +$$

$$+ (1-\pi)[\, C(n+1,i) + X(n+1,i)]\}\ P_i^{(n)}(1), \tag{40}$$

где $P_i^{(n)}(1)$ является ценой однопериодной дисконтированной облигации во состоянии $(n,\ i)$.

<u>Доказательство.</u> В этом доказательстве мы будем игнорировать платежи $X(n,i)$. Присоединение этих платежей является тривиальным обобщением формулы. В состоянии i в момент n рассмотрим дисконтированную облигацию со сроком погашения T (любое произвольное T). Образуем безрисковый портфель из этой облигации и актива C посредством покупки одной облигации и $\xi\, C$ активов. Когда предпочитается верхнее состояние, стоимость портфеля равна

$$V(\text{верхнее состояние}) = P_i^{(n)}(T)h(T-1) \,/\, P_i^{(n)}(1) + \xi\, C(n+1,\, i+1). \tag{41}$$

Аналогично, когда предпочитается нижнее состояние, стоимость портфеля равна

$$V(\text{нижнее состояние}) = P_i^{(n)}(T)h^*(T-1) \,/\, P_i^{(n)}(1) + \xi\, C(n+1,\, i\,). \tag{42}$$

Так как портфель является свободным от риска, мы требуем, чтобы

$$V(\text{верхнее состояние}) = V(\text{нижнее состояние}). \tag{43}$$

Объединяя равенства (41), (42) и (43) и преобразовывая их, мы получим

$$\xi = P_i^{(n)}(T)[\, h^*(T-1) - h(T-1)] \times P_i^{(n)}(1)[C(n+1,\, i+1) - C(n+1,\, i\,)]. \tag{44}$$

Тогда стоимость исходного портфеля в момент n будет равна

$$V = P_i^{(n)}(T) + \xi\, C(n,\, i)\,. \tag{45}$$

Из соображений отсутствия арбитража мы имеем

$$V = V(\text{нижнее состояние}) \times P_i^{(n)}(1)\,. \tag{46}$$

Используя равенства (44), (45) и (46), а также равенство (42), мы получим желаемый результат.

Доказанное утверждение дает возможность определить исходную цену актива путем процедуры обратной подстановки – метода часто используемого в финансовой литературе последних лет. Конечное условие (38) конкретизирует стоимость актива во всех состояниях в момент T. Тогда уравнение (40) позволяет определять свободную от арбитража цену актива за один период до истечения срока. Пусть такая цена равна $C^*(T\text{-}1, i)$. Но реальная рыночная цена должна удовлетворять граничным условиям (39). Тогда рыночная цена актива должна определяться по формуле

$$C(T\text{-}1, i) = max[L(T\text{-}1, i), min\,\big(C^*(T\text{-}1, i), U(T\text{-}1, i)\big)]. \tag{47}$$

Применим теперь эту процедуру периодически, раскручивая ее в обратном времени. То есть, задавая цены актива во всех состояниях в момент n, мы можем вычислять свободные от арбитража цены актива в момент $n - 1$ по уравнению (40). Затем, применяя граничные условия (39), мы можем регулировать рыночные цены во всех состояниях в момент $n - 1$. После T шагов получим стоимость актива в момент $n = 0$, которая и является исходной ценой.

Эта рекуррентная процедура применяется во многих моделях, но имеется две интересные особенности в случае модели Хо–Ли. Во-первых, однопериодная норма дисконтирования в модели Хо–Ли является зависимой от состояния и времени, а не постоянной, как в других моделях. Она вычисляется посредством $P_i^{(n)}(1)$ и определяется внутри модели. Поскольку эти однопериодные ставки зависят от исходной функции дисконтирования, в модели Хо–Ли явно видно, как исходная временная структура влияет на оценивание случайных выплат.

Во-вторых, в модели Хо–Ли конечные условия (31) и граничные условия (32) могут, в свою очередь, точно определяться активами, зависимыми от процентной ставки. Поэтому в каждом состоянии и в каждый момент времени как превалирующая функция дисконтирования, так и ее последовательные изменения определяются точно. Следовательно, цены других активов, зависимых от процентной ставки, могут, в свою очередь, быть определены для того, чтобы найти эти условия. Например, для опционов фьючерсов процентной ставки с помощью модели Хо–Ли сначала могут быть найдены цены фьючерсов, после чего цены опционов могут быть определены через цены фьючерсов.

Когда исходная функция дисконтирования задается через $P(T)$, цена дисконтированной облигации со сроком погашения T равна, по определению, $P(T)$. Но цена дисконтированной облигации может быть также определена рекуррентным методом, описанным выше. Иными словами, дисконтированная облигация может рассматриваться как актив, зависящий от процентной ставки, со сроком погашения T , с конечным условием $f(i) = 1$ и без каких-либо верхней и нижней границ и промежуточных платежей.

Следовательно, дисконтированная облигация может быть оценена рекуррентным методом, описанным в этом разделе. Покажем, что вычисленная цена гарантированно будет наблюдаемой ценой $P(T)$, хотя этот результат является интуитивно ясным. Действительно, когда изменения временной структуры порождаются моделью Хо–Ли, рекуррентная процедура определения цены дисконтированной облигации дает уравнивающие цены, которые определяются посредством исходной временной структуры. Поэтому, хотя биномиальная псевдовероятность π и функции возмущения h и h^* используются в рекуррентной процедуре, они не влияют на найденную окончательно цену дисконтированной облигации.

Доказательство. Мы докажем это путем индукции по m, числу периодов до погашения дисконтированной облигации. Результат для $m = 1$ является очевидным. Когда имеется только один период до погашения в любом узле времени-состояния (n, i), положим $C(n+1, i+1) = C(n+1, i) = 1$. По формуле (40) мы имеем

$$C(n, i) = [\pi + (1-\pi)]\, P_i^{(n)}(1) = P_i^{(n)}(1).$$

Так что стоимость одноопериодной облигации в (n, i) равна $P_i^{(n)}(1)$, как и требуется.

Предположим, что утверждение теоремы имеет место для всех сроков до погашения m, меньших некоторого числа N. Теперь рассмотрим случай, когда дисконтированная облигация в узле времени-состояния (n, i) имеет $N+1$ периодов до погашения. В следующем периоде в верхнем состоянии облигация имела бы срок погашения N. По индукции рекуррентная процедура давала бы цену случайного иска, равную $P_{i+1}^{(n+1)}(N)$. Аналогично для нижнего состояния в следующем периоде цена случайного иска должна быть $P_i^{(n+1)}(N)$.

Снова по уравнению (40) мы имеем

$$C(n, i) = [\pi P_{i+1}^{(n+1)}(N) + (1-\pi)\, P_i^{(n+1)}(N)\,]\, P_i^{(n)}(1)\,. \qquad (48)$$

Используя равенства (7) и (8) для упрощения выражения (48), мы сводим его к виду

$$C(n, i) = P_i^{(n)}(N+1)\,. \qquad (49)$$

Равенство (49) говорит о том, что актив в узле времени-состояния (n, i) имеет стоимость дисконтированной облигации со сроком погашения $N+1$, что завершает доказательство. Заметим, что этот результат получается, даже если параметры модели Хо–Ли не являются независимыми от времени и состояния, то есть когда вероятность π и функции возмущения h и h^* являются функциями i и n.

Таким образом, мы используем наблюдаемую цену $P(T)$, чтобы управлять изменениями свободной от арбитража временной структурой. Когда модель Хо–Ли используется для определения цены дисконтированной облигации, цена оказывается равной $P(T)$; в противном случае могли бы реализоваться арбитражные возможности.

Поясним важность этого результата на примере. Предположим, мы знаем эволюцию краткосрочной ставки (ставки одного периода) во времени. Конкретно в каждый момент n и в каждом состоянии i (в каждом узле (n, i) биномиальной решетки) мы знаем цену однопериодной облигации $P_i^{(n)}(1)$ и биномиальную псевдовероятность π. В этом случае нам не нужно знать всю временную структуру в каждом узле и не имеется никаких условий отсутствия арбитража для проверки. Зная только π и $P_i^{(n)}(1)$, мы всегда можем определить цену актива, зависящего от процентной ставки. Такая модель определения цены активов включает, как существенный элемент один источник стохастического изменения краткосрочной ставки и по этой причине может быть названа *однофакторной моделью*.

Однофакторная модель аналогична моделям непрерывного времени, рассмотренным в разделе 2, с одним небольшим отличием. Модели в разделе 2 (и разделах 4.1 и 4.3) используют реальную вероятность перехода q процесса краткосрочной ставки и премию срока τ. В модели Хо–Ли используются биномиальные псевдовероятности π, а при определении премии срока τ и реальные вероятности переходов q. Так что модель Хо–Ли является однофакторной моделью в том смысле, что цены всех активов определяются с помощью изменения краткосрочной ставки. Но в модели Хо–Ли изменения краткосрочной ставки подчиняются некоторому ограничению. Краткосрочная ставка должна развиваться таким образом, чтобы в случае определения цены дисконтированных облигаций (или портфель дисконтированных облигаций) как активов посредством описанной процедуры попятного движения получаемая цена гарантированно основывалась на исходной функции дисконтирования.

Отметим важные особенности модели Хо–Ли в смысле ее практического использования. Цены дисконтированных облигаций являются, в принципе, наблюдаемыми и эти цены полностью используются в модели Хо–Ли для оценивания случайных исков облигаций; в этом смысле цены активов, зависимых от процентной ставки, определяются *относительно* временной структуры. В отличие от этого, однофакторные модели, рассмотренные в разделе 2, не используют эти цены облигаций при построении стохастического процесса краткосрочной ставки, поэтому нет гарантии, что модельные цены лежащих в основе облигаций являются теми, которые наблюдаются во временной структуре.

5. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

5.1. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ КРАТКОСРОЧНЫХ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК

В предыдущих главах были рассмотрены основные однофакторные модели, описывающие динамику процентных ставок, которые предполагают наличие только одной стохастической переменной для описания состояния процесса процентных ставок. К ним относятся модель Васичека, модель CIR, модель Хо–Ли, модель Халла–Уайта (или расширенная модель Васичека). Процесс для краткосрочной процентной ставки в этих моделях определяется уравнением

$$dr = \mu(t,r)dt + \sigma(t,r)dW(t)\,, \tag{1}$$

где $\mu(t,r)$ и $\sigma(t,r)$ являются известными детерминированными функциями дрейфа и волатильности, соответственно, а $W(t)$ – винеровским процессом. Разные модели предполагают различный вид функций $\mu(t,r)$ и $\sigma(t,r)$.

Как и раньше, будем обозначать через T дату погашения дисконтированной облигации, а через τ срок до ее погашения, начиная с текущего момента времени t, $\tau = T - t$. Когда цена P дисконтированной облигации является дважды непрерывно дифференцируемой детерминированной функцией $P(t,r;T)$ переменных t и r (удобно рассматривать T в качестве параметра), она тоже является случайным процессом

$$dP = P\,f(t,r;T)\,dt + P\,g(t,r;T)\,dW(t)\,, \qquad P(T,r;T) = 1\,,$$

где $W(t)$ - тот же самый винеровский процесс, что и в уравнении (1). Через коэффициенты f и g этого уравнения определяется рыночная цена риска λ при помощи равенства

$$\lambda(t,r) = \big(f(t,r;T) - r(t)\big)\,/\,g(t,r;T)\,.$$

Если λ не зависит от T, это равенство называется локальным условием отсутствия арбитража. Когда это условие имеет место, цена $P(t,r;T)$ удовлетворяет уравнению временной структуры (фундаментальному уравнению в частных производных при определении цен активов):

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu + \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0\,, \qquad t \le T\,,$$

Если функции $\mu(t,r)$ и $\sigma^2(t,r)$ являются линейными относительно r

$$\mu(t,r) = \alpha(t)\, r + \beta(t)\,, \qquad \sigma^2(t,r) = \gamma(t)\, r + \delta(t)\,,$$

решение уравнения временной структуры имеет вид

$$P(t,r;T) = \exp\{A(t,T) - r\, B(t,T)\}\,, \tag{2}$$

где функции $A(t,T)$ и $B(t,T)$ для различных моделей различны. Приведем некоторые свойства этих функций для моделей, названных выше. Функции $B(t,T)$ являются монотонно уменьшающимися от некоторого положительного значения $B(0,T)$, когда $t = 0$, до $B(T,T) = 0$ при $t = T$. Для этих функций имеют место следующие неравенства:

$$B_{\text{В}}(t,T) = B_{\text{ХУ}}(t,T) > B_{\text{CIR}}(t,T) < B_{\text{ХЛ}}(t,T) = T - t = \tau\,, \qquad 0 \le t \le T\,,$$

Поведение функций $A(t,T)$ является довольно сложным. Общим свойством для этих функций является равенство $A(T,T) = 0$. Функции $A(t,T)$ и $B(t,T)$ хорошо определяются на интервале $0 \le t \le T$.

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДОХОДНОСТИ

В финансовой прессе обычно котируются или цены, или доходности ценных бумаг. Для облигаций котируются только доходности. Поэтому представляет интерес построение модели случайного процесса для доходности. Доходность является эффективной процентной ставкой, которая определяется соотношением

$$y(t,T) = -\,[\ln P(t,T)]/\,(T - t)\,, \qquad T - t \ge 0\,.$$

Поскольку цена P является случайным процессом, доходность тоже представляет собой случайный процесс. Из формулы (2) получается равенство

$$\tau\, y(t,T) = r(t)\, B(t,\, t + \tau) - A(t,\, t + \tau),$$

из которого находим доходность в виде

$$y(t,T) = (r(t)\, B(t,\, t + \tau) - A(t,\, t + \tau))\,/\,\tau \; = \; h(t,r;T)\,,$$

что вместе с уравнением (1) является основой для построения следующего стохастического дифференциального уравнения для $y(t,T)$:

$$dy = u(t,r;T)\, dt + v(t,r;T)\, dW(t)\,, \tag{3}$$

где $W(t)$ - тот же самый винеровский процесс, что и в уравнении (1), и коэффициенты u и v определяются по правилу дифференцирования Ито следующими выражениями:

$$u(t,r;T) = \frac{\partial h}{\partial t} + \mu(t,r)\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} ,$$

$$v(t,r;T) = \sigma(t,r)\frac{\partial h}{\partial r} .$$

Для модели Васичека и модели CIR функции $A(t,T)$ и $B(t,T)$ зависят от своих аргументов следующим образом:

$$A(t,T) = A(T-t) = A(\tau) , \qquad B(t,T) = B(T-t) = B(\tau) .$$

Поэтому для этих моделей

$$\frac{\partial h}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{B(\tau)}{\tau}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} = 0 .$$

Следовательно, явный вид коэффициентов u и v следующий:

$$u = \frac{B}{\tau}\mu\left(t, \frac{A + y\tau}{B}\right) , \qquad v = \frac{B}{\tau}\sigma\left(t, \frac{A + y\tau}{B}\right) .$$

Используя в этих выражениях явную форму выражений для дрейфа μ и волатильности σ в упомянутых выше моделях, можно получить явную форму стохастических дифференциальных уравнений для этих моделей.

Для модели Васичека мы имеем $\mu(t,r) = k(\theta - r)$ и $\sigma(t,r) = \sigma$. Поэтому

$$dy = k\left(\frac{\theta\, B(\tau) - A(\tau)}{\tau} - y\right)dt + \frac{\sigma\, B(\tau)}{\tau} dW(t) . \tag{4}$$

Для этой модели функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ имеют вид

$$A(\tau) = \frac{\left[B(\tau) - \tau\right]\left[k(k\theta + \lambda\sigma) - \dfrac{\sigma^2}{2}\right]}{k^2} - \frac{\left[B(\tau)\right]^2 \sigma^2}{4k} , \tag{5}$$

$$B(\tau)=\frac{1-e^{-k\tau}}{k}\ , \tag{6}$$

и предполагается, что рыночная цена риска $\lambda(t,r)=\lambda$ постоянная.

Для модели CIR мы имеем $\mu(t,r)=k(\theta-r)$ и $\sigma(t,r)=\sigma\sqrt{r}$. Тогда

$$dy=k\left(\frac{\theta\ B(\tau)-A(\tau)}{\tau}-y\right)dt+\frac{\sigma}{\tau}\sqrt{B(\tau)\big(A(\tau)+y\tau\big)}dW(t)\ . \tag{7}$$

Для модели CIR функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ имеют вид

$$A(\tau)=\frac{2k\theta}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2\varepsilon\ e^{(k+\lambda+\varepsilon)\tau\ /2}}{2\varepsilon+(k+\lambda+\varepsilon)\left(e^{\varepsilon\,\tau}-1\right)}\right] \tag{8}$$

и

$$B(\tau)=\frac{2\left(e^{\varepsilon\,\tau}-1\right)}{2\varepsilon+(k+\lambda+\varepsilon)\left(e^{\varepsilon\,\tau}-1\right)}\ , \tag{9}$$

здесь $\varepsilon=\sqrt{(k+\lambda)^2+2\sigma^2}$ и предполагается, что рыночная цена риска $\lambda(t,r)=-\frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r(t)}$, где λ является постоянной.

Для модели Хо –Ли $\mu(t,r)=\theta(t)$ и $\sigma(t,r)=\sigma$. Для модели Халла –Уайта $\mu(t,r)=\theta(t)-kr$ и $\sigma(t,r)=\sigma$.

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Наиболее известными безрисковыми процентными ставками среди котируемых в финансовой прессе процентных ставок являются ставки доходности ценных бумаг Казначейства США. Однако доходности представляют собой эффективные ставки. В то же самое время представляют интерес краткосрочные процентные ставки $r(t)$, которые описываются уравнением (1). Построим оценки параметров уравнения (1) по наблюдениям процесса $\{y(t,T)\}$, который определяется уравнением (3). Для получения оценок можно использовать два подхода.

Первый подход основывается на возможности получения аналитического решения уравнения (3). Поскольку случайные приращения, которые возбуждают процесс $y(t)$, имеют нормальное распределение, можно теоретически найти распределение вероятностей решения уравнения (3) и использовать метод максимального правдоподобия (ММП) для оценивания неизвестных параметров.

Например, в случае модели Васичека аналитическое решение уравнения (4) имеет вид

$$y(t) \;=\; y(s)\,\exp\{-k(t-s)\} - F(1-\exp\{-k(t-s)\}) + \xi\,(s,t)\,, \quad s<t\,, \qquad (10)$$

где $F = \dfrac{A(\tau)}{B(\tau)} - \dfrac{\theta B(\tau)}{\tau}$ и $\xi\,(s,t)$ является случайной величиной с нормальным распределением, которая имеет нулевое среднее и дисперсию, равную

$$\mathrm{Var}\{\xi\,(s,t)\} = G[1-\exp\{-2k(t-s)\}]\,, \qquad s<t\,, \qquad (11)$$

где $G = \sigma^2\, B^2(\tau)/2k\tau^2$. Случайные величины $\xi\,(s_1,t_1)$ и $\xi\,(s_2,t_2)$ являются взаимно независимыми для любых $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$. Функция правдоподобия для этого случая будет выписана позже.

Второй подход основывается на возможности перейти от уравнения (3) к его разностной аппроксимации. Разностной версией уравнения (3) является выражение (см. Mihlstein, 1974)

$$\Delta y = u(t,y)\,\Delta t + v(t,y)\,\Delta W + \frac{1}{2}v(t,y)\frac{\partial\, v(t,y)}{\partial\, y}\left((\Delta W)^2 - \Delta t\right).$$

Рассмотрим более детально случай, когда функция v не зависит от y

$$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t) = u(t,y(t);T)\,\Delta t + v(t;T)\,\Delta W\,. \qquad (12)$$

Предположим, что параметры уравнения (1) неизвестны, но мы имеем выборку ставок доходности y. Получим оценки неизвестных параметров уравнения (1), используя аппроксимацию (12). Конкретно у нас есть выборочное множество наблюдений $\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$ в моменты времени $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$, $y_j = y(t_j,\tau)$, $1 \le j \le N$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta y_j = y_{j+1} - y_j,\ \Delta t_j = t_{j+1} - t_j,\ \Delta W_j = (W_{j+1} - W_j)/\sqrt{\Delta t_j}\,,\ u_j = u(t_j,y_j;T),\ v_j = v(t_j,y_j;T).$$

В этих обозначениях y_j, Δy_j, t_j, Δt_j – известные выборочные данные. Приращения $\{\Delta W_j\,,\ 1 \le j \le N\}$ образуют множество взаимно независимых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, а u_j и v_j являются функциями, известными с точностью до параметров. Построим процедуру оценивания этих неизвестных параметров. Из равенства (12) можно написать, что

$$v_j\,\Delta W_j = y_{j+1} - y_j - u_j \Delta t_j\,, \qquad 1 \le j \le N-1\,. \qquad (13)$$

Поскольку $\{\Delta W_j, 1 \le j \le N\}$ является множеством взаимно независимых случайных величин с нормальным распределением, естественно для оценивания параметров обратиться к методу максимального правдоподобия. Логарифм функции правдоподобия (точнее, та его часть, которая зависит от неизвестных параметров) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left[\left(\frac{y_{j+1}-y_j-u_j\Delta t_j}{v_j}\right)^2-\ln v_j\right]. \tag{14}$$

Функции u_j и v_j для модели Васичека и модели CIR являются известными с точностью до параметров $k, \theta, \lambda, \sigma$. Если подставить эти функции в выражение (14), оно будет функцией этих параметров. Минимизируя выражение (14) по значениям $k, \theta, \lambda, \sigma$, можно найти оценки ММП $\hat{k}, \hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}$, затем получить оценки функций $\mu(t,r)$ и $\sigma(t,r)$, входящих в уравнение (1), путем подстановки $\hat{k}, \hat{\theta}, \hat{\lambda}, \hat{\sigma}$ на места неизвестных параметров.

В модели Васичека явная форма той части логарифма функции правдоподобия, которая зависит от неизвестных параметров, для первого метода (будем называть его точным) из равенств (10) - (11) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{\left(y_{j+1}-y_j+F\left(1-\exp\left\{-k\Delta t_j\right\}\right)\right)^2}{G\left(1-\exp\left\{-2k\Delta t_j\right\}\right)}-\ln G\left(1-\exp\left\{-2k\Delta t_j\right\}\right)\right], \tag{15}$$

а для второго метода (будем называть его приближенным) из (14) она будет следующей:

$$\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{\left(y_{j+1}-y_j\left(1-k\Delta t_j\right)+Fk\Delta t_j\right)^2}{G2k\Delta t_j}-\ln\left(G2k\Delta t_j\right)\right]. \tag{16}$$

Явная зависимость выражений (15) и (16) от параметров θ, λ, σ находится из выражений (5) - (6) и (10) - (11).

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ

Для моделей Хо –Ли и Халла –Уайта неизвестными параметрами являются k, σ и $\theta(t)$. Модель Халла –Уайта превращается в модель Хо-Ли, когда параметр k стремится к нулю, так как $B_{XY}(\tau) = (1 - \exp\{-k\tau\})/k$,

$\lim\limits_{k\to 0} B_{XY}(\tau) = \tau = B_{ХЛ}(\tau)$. Особенностью этих моделей является то, что $\theta(t)$ оказывается функцией времени. Рассмотрим этот случай более детально для модели Халла –Уайта. Предположим, что функция $\theta(t)$ может быть представлена в виде разложения по некоторому базису линейно независимых функций $\{\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ... , $\phi_m(t)\}$, $\phi_0(t) = t$. Так что

$$\theta(t) = \sigma^2 t + \sum_{j=1}^{m} c_j \phi_j(t) \ . \tag{17}$$

Для модели Халла –Уайта (как и модели Хо –Ли) функция $A(t,T)$ имеет вид

$$A(t,T) = -\int_t^T \theta(s) B(s,T) ds + \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s,T) ds \ . \tag{18}$$

Подставляя в формулу (18) разложение (17) и производя интегрирование, мы получим явное выражение $A(t,T)$ с точностью до параметров k , σ и $\{c_j\}$. Это позволяет получить явные выражения коэффициентов u и v уравнения (3) с точностью до параметров перечисленных выше. Если мы подставим эти выражения в функцию правдоподобия, то мы получим ту же самую задачу, как и в случае не зависящих от времени неизвестных параметров. Только число неизвестных параметров будет больше. Поскольку при этом не возникает принципиальных отличий от предыдущего случая, мы не рассматриваем его дальше.

ПОЛУЧЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для иллюстрации представленных методов рассмотрим оценку параметров уравнения (1) путем наблюдения процесса ставки доходности в предположении, что этот процесс описывается моделью Васичека. Для этой модели коэффициенты уравнения (3) имеют вид

$$u_j = k \frac{\theta \, B(\tau) - A\tau}{\tau} - k y_j = k\left(-F - y_j\right), \qquad v_j = \sigma \frac{B(\tau)}{\tau} \ . \tag{19}$$

Минимизируемые логарифмы функции правдоподобия представляются выражениями (15) и (16).

Путем минимизации выражений (15) и (16) нам нужно оценить четыре параметра: k , θ , λ , σ . Выражения (15) и (16) явно зависят от трех параметров: k , F и G .

$$F = \frac{A(\tau)}{B(\tau)} - \frac{\theta B(\tau)}{\tau} \ , \tag{20}$$

$$G = \frac{\sigma^2 B^2(\tau)}{2k\tau^2} \ . \tag{21}$$

Следует организовать вычислительный процесс так, чтобы сначала оценить параметры k, F и G, а затем определить параметры θ, λ, σ, рассматривая выражения (21) как уравнения относительно этих параметров. Заметим, что при этом мы получаем только два уравнения для определения трех параметров. Это значит, что они не могут быть найдены однозначно. Строго говоря, рыночная цена риска не является параметром модели (1) и должна задаваться извне, на основе рыночных реалий.

Рассмотрим более подробно эту проблему для модели Васичека. В этом случае функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ определяются выражениями (5) и (6). Предположим, что оценки параметров k, F и G найдены и равны $\hat{k}$, $\hat{F}$ и $\hat{G}$. Тогда для модели Васичека выражения (21) приобретают вид

$$\hat{F} = \left[1 - \frac{\tau}{\hat{B}(\tau)}\right] \times \left[\theta + \frac{\lambda\sigma}{\hat{k}} - \frac{\sigma^2}{2\hat{k}^2}\right] - \frac{\hat{B}(\tau)\sigma^2}{4\hat{k}} - \frac{\theta\hat{B}(\tau)}{\tau} \ ,$$

$$\hat{G} = \frac{\sigma^2 \hat{B}^2(\tau)}{2\hat{k}\tau^2},$$

где $\hat{B}(\tau) = \left(1 - \exp\left\{-\hat{k}\tau\right\}\right) \big/ \hat{k}$. Таким образом, получаем оценки $\hat{\sigma}$ и $\hat{\theta}$:

$$\hat{\sigma} = \frac{\tau\sqrt{2\hat{k}\hat{G}}}{\hat{B}(\tau)},$$

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{F} + \dfrac{\hat{\sigma}^2\hat{B}(\tau)}{4\hat{k}} - \left(1 - \dfrac{\tau}{\hat{B}(\tau)}\right)\left(\dfrac{\lambda\hat{\sigma}}{\hat{k}} - \dfrac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{k}^2}\right)}{1 - \dfrac{\tau}{\hat{B}(\tau)} - \dfrac{\hat{B}(\tau)}{\tau}}.$$

Последняя оценка зависит от рыночной цены риска λ. Поэтому если λ не задана, то однозначной оценки для параметра θ получить не удается. Когда справедлива гипотеза несмещенных ожиданий (см. Введение), то есть функция дрейфа цены равна безрисковой краткосрочной ставке, рыночная цена риска λ равна нулю и оценка θ находится однозначно.

Поскольку наиболее трудной вычислительной процедурой при получении оценок является минимизация, то лучше реализовать ее не в трехмерном пространстве параметров (k, F, G), а найти два последних параметра в явной форме через k (это возможно, так как (15) и (16) являются простыми выпуклыми функциями этих параметров), подставить полученные выражения в формулы (15) и (16) и минимизировать их по единственной переменной k. Для унификации результатов введем обозначения

$$E_j = \exp\{-k\Delta t_j\}\ ,\ e_j = \exp\{-2k\Delta t_j\} \tag{22}$$

для точного метода и

$$E_j = 1 - k\Delta t_j\ ,\ e_j = 1-2k\Delta t_j \tag{23}$$

для приближенного метода. Экстремальные значения параметров F и G определяются выражениями

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{N-1}\left(1-E_j\right)\left(y_{j+1}-y_jE_j\right)\Big/\left(1-e_j\right)}{\sum_{j=1}^{N-1}\left(1-E_j\right)^2\Big/\left(1-e_j\right)}\ , \tag{24}$$

$$G = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\left(y_{j+1}-y_jE_j+F\left(1-E_j\right)\right)^2}{\left(1-e_j\right)}\ . \tag{25}$$

Тогда минимизация выражений (15) и (16) сводится к минимизации суммы

$$\ln G + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\ln\left(1-e_j\right) \tag{26}$$

по единственному параметру k.

Пример. В качестве данных для иллюстрации использования описанных процедур оценивания возьмем кривые доходности ценных бумаг Казначейства США. Для анализа выберем данные, охватывающие период от 2 января 1991 г. по 1 октября 1996 г. (более чем 1400 деловых дней). До рассмотрения численных результатов обратим внимание на характер данных. На рис. 1 для примера показано общее поведение ставок доходности для казначейских билетов трехмесячного срока погашения. Из этих кривых видно, что процесс ставок доходности не является стационарным в течение рассматриваемого периода времени.

В то же самое время модель Васичека предназначена для описания стационарных процессов. Поэтому требуется некоторая модификация, чтобы применить эту модель для анализа выбранных процессов доходности. Для этого воспользуемся методом классической декомпозиции, который обычно применяется для анализа временных рядов. Он заключается в расчленении данных на три компоненты: систематическую (или медленно меняющуюся, обычно, называемую трендом), сезонную (или периодическую) и случайную.

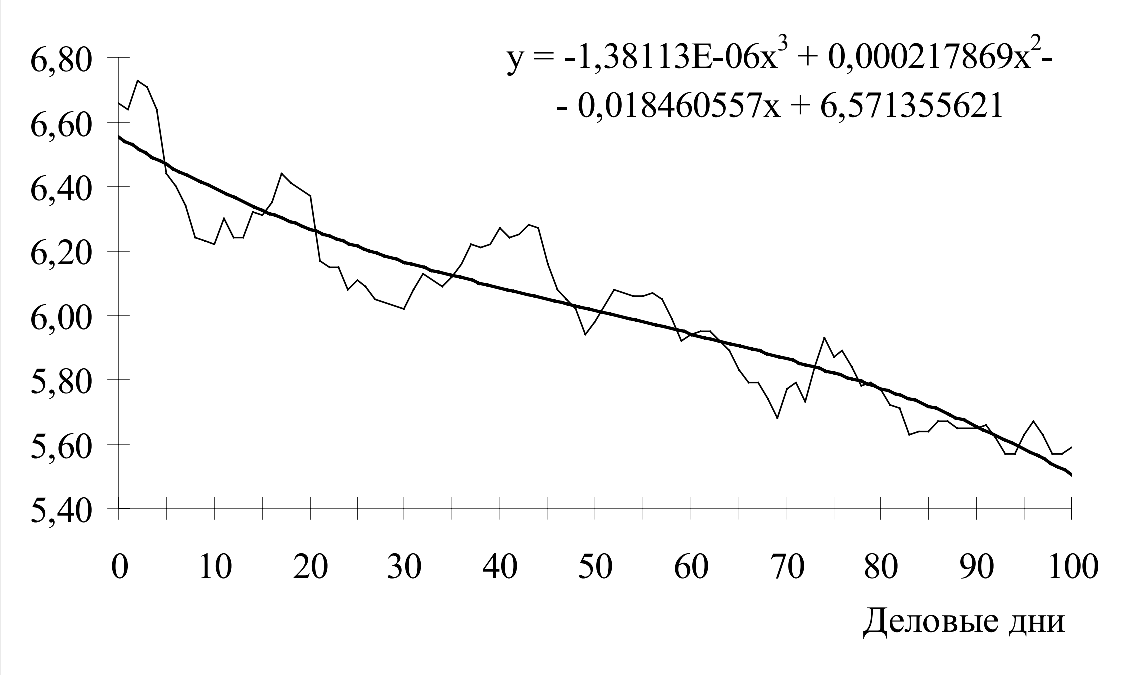


Рис. 1. Фрагмент процесса ставок доходности для трехмесячных билетов Казначейства США за первые сто дней рассматриваемого периода. Вместе с процессом доходности показан его тренд в форме полинома третьей степени, уравнение которого также приведено на рисунке. (Ставка доходности измеряется в процентах)

Поскольку в исследуемых данных сезонная компонента отсутствует, мы в дальнейшем будем рассматривать только две оставшиеся компоненты. Найдем медленно меняющуюся компоненту тренда и удалим ее из данных, чтобы получить случайную компоненту, которую уже можно рассматривать как стационарный процесс. Тренд удобно определить в виде полинома, коэффициенты которого находятся методом наименьших квадратов. На рис. 1 вместе с реализацией процесса ставок доходности представлен тренд в виде полинома. Для наглядности на этом же рисунке приведено и уравнение этого полинома. На рис. 2 показана реализация отклонений от тренда для рассматриваемого случая. Как видно из рисунка, процесс отклонений от тренда можно рассматривать как стационарный процесс.

Таким образом, процессы доходности проанализируем тремя способами:

1. Принимаем, что доходность описывается моделью Васичека, и используем логарифмическую функцию правдоподобия (15) для оценки неизвестных параметров процесса краткосрочной ставки. Этот способ в дальнейшем будем называть «анализ процесса доходности».
2. Принимаем, что отклонения доходности от тренда описываются моделью Васичека, и используем логарифмическую функцию правдоподобия (15) для оценивания неизвестных параметров процесса краткосрочной ставки. Этот способ назовем «анализ отклонений доходности», когда будут делаться сравнения с анализом процесса доходности. Этот способ будем называть «точный

метод», когда сравнения будут производиться со следующим, третьим способом оценивания.

Рис. 2. Фрагмент процесса отклонений доходности от тренда, соответствующий данным рис. 1. (Отклонения от тренда измеряются в долях процента)

3. Принимаем, что отклонения процесса доходности от тренда описываются моделью Васичека (как и в предыдущем способе), но для оценивания неизвестных параметров процесса краткосрочной ставки используется логарифмическая функция правдоподобия (16). Этот способ назовем «приближенный метод», когда будут делаться какие либо сравнения с точным методом.

Сравнение точного и приближенного методов при использовании их для анализа процесса отклонений доходности от своего тренда показывает, что приближенный метод дает достаточно высокий уровень правдоподобия (более 0,99 от уровня правдоподобия точного метода для всех сроков погашения). При оценивании параметров k, F и G использование приближенного метода, основанного на разностном уравнении (12), также дает несущественные погрешности. Однако при анализе исходного процесса доходности приближенный метод становится неустойчивым.

Перейдем теперь к сравнению методов оценивания неизвестных параметров при помощи анализа процесса доходности (ПД) и отклонений от тренда (ОТ) этого процесса. Уточним смысл оцениваемых параметров k, F и G. Пусть s обозначает начальный момент времени и $y(s)$ обозначает начальную ставку доходности. Для анализа процесса доходности имеем для $s < t$

$$y(t) = y(s)\exp\{-k_{\text{ПД}}(t-s)\} - F_{\text{ПД}}(1-\exp\{-k_{\text{ПД}}(t-s)\}) + \xi(s,t)\,. \qquad (27)$$

Для анализа отклонений от тренда $Y(t)$ процесса доходности

$$y(t) - Y(t) = (y(s) - Y(t)) \exp\{-k_{\text{ОТ}}(t-s)\} -$$

$$- F_{\text{ОТ}}(1 - \exp\{-k_{\text{ОТ}}(t-s)\}) + \xi(s,t)\,. \qquad (28)$$

Процесс $\xi(s,t)$ как в модели (27), так и в модели (28) имеет нулевое среднее, а его дисперсия определяется по несколько отличающимся формулам:

$$Var_{ПД}[\xi(s,t)] = G_{ПД}\left(1 - \exp\left\{-2k_{ПД}(t-s)\right\}\right)\,, \qquad (29)$$

$$Var_{OT}[\xi(s,t)] = G_{OT}\left(1 - \exp\left\{-2k_{OT}(t-s)\right\}\right)\,. \qquad (30)$$

Параметр G является оценкой установившегося значения дисперсии процесса доходности. Таким образом, при анализе процесса доходности дисперсия G в формуле (29) является суммой дисперсий самого тренда и отклонений процесса доходности от него. При анализе же процесса отклонений доходности от тренда дисперсия G в формуле (30) является дисперсией только отклонений от тренда. Поэтому значение параметра G для процесса доходности (28) должно быть существенно меньше, чем для процесса отклонения доходности от своего тренда (27).

Опыт показывает, что приближенный метод, основанный на разностном уравнении (12), является удовлетворительным для стационарных процессов, но является неустойчивым для нестационарных процессов. Иными словами, он хорошо работает при анализе отклонений процесса доходности от тренда, но дает неудовлетворительные результаты при анализе самого процесса доходности. Метод анализа процесса доходности является удовлетворительным для оценивания параметров процесса доходности. Но он менее точен при оценивании параметров процесса краткосрочной процентной ставки. Метод анализа отклонений от тренда (точный метод) имеет лучшие по сравнению с вышеупомянутыми методами характеристики точности.

5.2 ПРЕДСКАЗАНИЕ ДОХОДНОСТИ ЦЕННЫХ БУМАГ

Определение стоимости ценных бумаг является интересной задачей, которая привлекает многих практиков, связанных с финансовыми рынками. Стоимость ценных бумаг достаточно просто определяется, если известны их номинальные цены, время до реализации и ставки доходности. Наиболее неопределенной характеристикой среди перечисленных является ставка доходности до погашения. Финансовая пресса регулярно сообщает (для некоторых ценных бумаг ежедневно) информацию о значениях ставки доходности, которая является фактически усредненной мгновенной процентной ставкой. В предыдущих главах мы видели, что мгновенная процентная ставка, свободная от риска, ведет себя как случайный процесс с независимыми винеровскими приращениями. Это влечет за собой то, что доходность до погашения является тоже случайным процессом. В табл. 1 представлено типичное сообщение относительно ставок кривых доходности ценных бумаг казначейства США. Таблица содержит информацию о значениях доходности до погашения для каждого делового дня в сентябре 1996 г. В этом разделе мы рассмотрим данные для индивидуального срока погашения (то есть один столбец табл. 1), оставив анализ всей таблицы как совокупности столбцов для следующего раздела 5.3, где будут рассматриваться матричные методы предсказания.

Для краткости анализа данных табл. 1 вместо даты (см. первый столбец) удобно использовать порядковый номер строки. Пусть Y_t обозначает значение доходности для строки номер t в избранном столбце, а Y означает среднее значение доходности по этому столбцу за сентябрь. Обычно процентные ставки доходности имеют довольно заметный тренд. Поэтому при анализе конечного ряда этих ставок в качестве среднего значения удобно выбрать этот тренд, считая его систематическим изменением доходности на ограниченном интервале времени. Тогда уравнения для случайных процентных ставок естественно считать уравнениями для отклонений случайного процесса доходности относительно тренда (систематической составляющей временного ряда доходностей). Мы введем отклонение доходности от ее среднего значения при помощи равенства $y_t = Y_t - Y$, где Y_t - наблюдаемая доходность, а Y - тренд. Чаще всего тренд аппроксимируется полиномом подходящей степени наилучшим образом, сглаживающим процесс доходности в среднеквадратическом смысле. Поскольку данные об изменении доходности сообщаются в дискретном времени (ежедневно), для описания процесса доходности удобнее использовать разностные уравнения авторегрессии или более подходящую модель вместо стохастических дифференциальных уравнений так, как это объяснялось в главе 3.

Мы будем предполагать, что доходность при погашении имеет отклонения y_i от своего среднего значения, динамика которых описывается уравнением

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} b_j y_{i-j} - c\, z_{i-1}\,, \tag{1}$$

где $\{z_i\}$ - независимые в совокупности случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией, p, c и $\{b_j\}$ - параметры модели. Параметры модели могут быть оценены по наблюдаемым данным с помощью стандартных статистических методов. Поскольку обычно предполагается, что $\{z_i\}$ нормально распределены, для оценки параметров естественно применять метод максимального правдоподобия, описанный в предыдущем разделе. Поэтому здесь мы будем предполагать, что параметры уравнения (1) известны и, если это необходимо, выписывать их оценки без подробного объяснения. Пусть нам известны все данные наблюдений до некоторого времени i. Здесь и в уравнении (1) i означает номер наблюдения. Обычно данные о значениях доходности не сообщаются в выходные дни и по праздникам и мы предполагаем, что эти дни не существуют. Если это невозможно, данные для пропущенных дней можно реставрировать путем линейной интерполяции или методом максимального правдоподобия. Мы будем предполагать, что одна из этих версий принята и у нас есть результаты всех наблюдений доходности до момента времени i. В общем случае нам не нужны *все* наблюдения, но мы принимаем это для удобства рассуждений.

Таблица 1

Ставки кривых доходности ценных бумаг казначейства США за сентябрь 1996 г.

№ п/п	Дата	Сроки погашения от 0,25 года до 30 лет									
		0,25	0,5	1,0	2	3	5	7	10	20	30
1	3.9	5,32	5,58	5,94	6,35	6,54	6,71	6,83	6,92	7,22	7,07
2	4.9	5,32	5,58	5,97	6,38	6,56	6,74	6,85	6,94	7,25	7,10
3	5.9	5,34	5,59	5,98	6,38	6,56	6,76	6,88	6,98	7,30	7,15
4	6.9	5,33	5,57	5,92	6,33	6,52	6,72	6,84	6,94	7,27	7,12
5	9.9	5,29	5,50	5,91	6,32	6,47	6,67	6,80	6,90	7,23	7,08
6	10.9	5,29	5,55	5,93	6,34	6,52	6,70	6,84	6,94	7,28	7,13
7	11.9	5,31	5,52	5,94	6,34	6,51	6,70	6,84	6,94	7,27	7,12
8	12.9	5,28	5,50	5,90	6,27	6,44	6,64	6,79	6,88	7,23	7,08
9	13.9	5,21	5,38	5,74	6,10	6,29	6,48	6,64	6,74	7,10	6,95
10	16.9	5,20	5,38	5,74	6,14	6,31	6,49	6,63	6,73	7,09	6,95
11	17.9	5,31	5,46	5,83	6,22	6,39	6,57	6,71	6,81	7,15	7,00
12	18.9	5,28	5,47	5,84	6,26	6,43	6,61	6,73	6,83	7,16	7,02
13	19.9	5,25	5,48	5,85	6,29	6,46	6,65	6,77	6,87	7,19	7,05
14	20.9	5,29	5,50	5,85	6,26	6,43	6,62	6,75	6,85	7,18	7,04
15	23.9	5,31	5,50	5,85	6,24	6,40	6,60	6,73	6,83	7,16	7,02
16	24.9	5,17	5,37	5,73	6,16	6,32	6,52	6,67	6,77	7,12	6,99
17	25.9	5,07	5,28	5,70	6,08	6,25	6,46	6,59	6,71	7,05	6,93
18	26.9	5,00	5,25	5,65	6,05	6,22	6,41	6,54	6,66	7,00	6,88
19	27.9	5,04	5,24	5,68	6,07	6,25	6,43	6,57	6,68	7,03	6,91
20	30.9	5,14	5,37	5,71	6,10	6,28	6,46	6,60	6,72	7,05	6,93

Нашей задачей является получение числовых значений доходности до погашения для будущих моментов времени, то есть оценок предсказания значений доходности с номерами $t > i$, когда известны доходности только с номерами $j \leq i$. Точность предсказания будем измерять дисперсией ошибки предсказания отклонения доходности, которое определяется уравнением (1). Мы будем искать такую оценку предсказания, которая минимизирует дисперсию этого отклонения.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТКЛОНЕНИЙ ЧЕРЕЗ СЛУЧАЙНЫЕ ПРИРАЩЕНИЯ

Уравнение (1) является уравнением процесса авторегрессии порядка p, $AR(p)$. Удобно представить отклонение y_i только через независимые в совокупности случайные величины $\{z_i\}$. Обозначим через D оператор временного сдвига, то есть $Dy_i = y_{i-1}$. Тогда уравнение (1) может быть переписано в виде

$$(1 - \sum_{j=1}^{p} b_j D^j)\, y_i = c\, z_{i-1}\,, \tag{2}$$

где D_j означает, что оператор сдвига используется j раз, то есть $D^j y_i = y_{i-j}$.

Предположим, что уравнение

$$1 - \sum_{j=1}^{p} b_j x^j = 0 \tag{3}$$

имеет p различных корней: x_1, x_2, ... , x_p. Это предположение не является принципиальным, но упрощает наши рассуждения. Пусть $f_j = 1/\,x_j$. Взаимоотношение между величинами $\{b_j\}$ и $\{f_j\}$ может быть установлено с помощью равенства

$$1 - \sum_{j=1}^{p} b_j x^j = (1 - f_1 x)\,(1 - f_2 x)\,...\,(1 - f_p x)\,. \tag{4}$$

Для того чтобы процесс (1) был стационарным, необходимо выполнить условия $|f_j| < 1$, $1 \le j \le p$. Уравнение (1) **(** и уравнение (2)**)** может быть переписано еще раз в виде

$$y_i = \left(1 - \sum_{j=1}^{p} b_j D^j\right)^{-1} c\, z_{i-1} \tag{5}$$

для того, чтобы представить отклонение y_i только через случайные величины $\{z_i\}$. Преобразуем оператор $(1 - \sum_{j=1}^{p} b_j D^j)^{-1}$ в форму, которая удобна для использования. Этот оператор в терминах уравнения (4) имеет вид:

$$(1 - \sum_{j=1}^{p} b_j D^j)^{-1} = \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{l \ne j,\, l=1}^{p} \left(1 - \frac{f_l}{f_j}\right) \left(1 - f_j D\right) \right)^{-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{l \ne j,\, l=1}^{p} \left(1 - \frac{f_l}{f_j}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f_j^{\,k} D^k \right). \tag{6}$$

Пусть для простоты $h_j = \left(\prod_{l \neq j, l=1}^{p} \left(1 - \frac{f_l}{f_j} \right) \right)^{-1}$. Тогда уравнение (5) принимает вид

$$y_i = c \left(\sum_{j=1}^{p} h_j \sum_{k=0}^{\infty} f_j^k D^k \right) z_{i-1} = c \sum_{j=1}^{p} h_j \sum_{k=0}^{\infty} f_j^k z_{i-k-1} = c \sum_{k=0}^{\infty} H_k z_{i-k-1} , \tag{7}$$

где

$$H_k = \sum_{j=1}^{p} f_j^k \left(\prod_{l \neq j, l=1}^{p} \left(1 - \frac{f_l}{f_j} \right) \right)^{-1} .$$

Форма (7) является наиболее удобной для вероятностного анализа, поскольку, являясь эквивалентной по отношению к (1), она представляет отклонение y_i только через случайные величины $\{z_t , \ t < i \}$.

ОЦЕНКА ПРЕДСКАЗАНИЯ

Уравнение (1) является линейным по отношению к y_k , $i–p \leq k \leq i$. Поэтому естественно конструировать предсказание значений будущих отклонений y_k , $k > i$, также в линейной форме. Представим оценку предсказания в виде

$$\hat{y}_{i+n} = \sum_{k=1}^{m} E_{k,n} y_{i-k+1} \ , \ n \geq 1 , \tag{8}$$

где m , $\{E_{k,n}\}$ - параметры оценки предсказания, n - заданное целое число, определяющее горизонт предсказания. Нашей задачей является определение такого набора коэффициентов предсказания $\{E_{k,n}\}$, который минимизирует дисперсию ошибки предсказания $(\hat{y}_{i+n} - y_{i+n})$.

Выразим будущее отклонение доходности при погашении y_{i+n} и ее оценку предсказания $\hat{y}_{i+n}$ согласно равенству (7)

$$\hat{y}_{i+n} = \sum_{k=1}^{m} E_{k,n} c \sum_{l=0}^{\infty} H_l z_{i-k-l} = c \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\min\{t,m\}} E_{k,n} H_{t-k} \right) z_{i-t} ; \tag{9}$$

$$y_{i+n} = c \sum_{t=1}^{\infty} H_{t-1} z_{i+n-t} = c \sum_{t=1}^{n} H_{t-1} z_{i+n-t} + c \sum_{t=1}^{\infty} H_{t+n-1} z_{i-t} . \tag{10}$$

Первое слагаемое в выражении (10) определяется случайными величинами, которые влияют на значения отклонения доходности после момента времени i . Второе слагаемое выражения зависит от случайных величин, которые влияют на значения доходности в момент времени i или до него. Таким образом, ошибка предсказания является разностью

$$\hat{y}_{i+n} - y_{i+n} = c\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\min\{k,t\}} E_{k,n}H_{t-k} - H_{t+n-1}\right)z_{i-t} - c\sum_{t=1}^{n} H_{t-1}z_{i+n-t}\,. \qquad (11)$$

Поскольку $\{z_t\}$ являются независимыми в совокупности случайными величинами с нулевым средним и единичной дисперсией, дисперсия ошибки предсказания равна

$$D_{m,n} = \boldsymbol{E}[(\hat{y}_{i+n} - y_{i+n})^2] = c^2\sum_{t=1}^{n} H_{t-1}^2 + c^2\sum_{t=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\min\{k,t\}} E_{k,n}H_{t-k} - H_{t+n-1}\right)^2 =$$

$$= c^2\,(g_0 - 2\sum_{k=1}^{m} E_{k,n}g_{k+n-1} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} E_{j,n}E_{k,n}g_{|j-k|}\,), \qquad (12)$$

где использовано обозначение $g_k = \sum_{t=0}^{\infty} H_t H_{t+k}$. Оптимальные коэффициенты предсказания $\{E_{k,n}\}$ минимизируют дисперсию $D_{m,n}$.

Удобно представить выражение (12) в компактной матричной форме. Введем обозначения: G - $(m\times m)$-матрица с элементами $G_{ij} = g_{|i-j|}$, $E^{\mathrm{T}} = (E_{1,n}\ E_{2,n}\ \dots\ E_{m,n})$ - m-вектор-строка коэффициентов предсказания $E_{k,n}$, $G_n^{\mathrm{T}} = (g_n\ g_{n+1}\ \dots\ g_{n+m-1})$ - m-вектор-строка, $(\ )^{\mathrm{T}}$ - знак транспонирования. Тогда дисперсия $D_{m,n}$ в выражении (12) может быть представлена в виде

$$D_{m,n} = c^2\,(1\ \ E_n^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} g_0 & -G_n^T \\ -G_n & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ E_n \end{pmatrix} \qquad (13)$$

с использованием блочной структуры векторов и матрицы.

Минимизация выражения (13) по векторам E_n дает результаты:

$$E_n^{\mathrm{opt}} = G^{-1}G_n \qquad (14)$$

$$D_{m,n}^{opt} = c^2\,(g_0 - G_n^{\mathrm{T}}G^{-1}G_n)\,. \qquad (15)$$

Формулы (13) – (15) могут быть переписаны в терминах корреляционных функций. Действительно, введем обозначение K - $(m\times m)$-матрица корреляции отклонений доходности с элементами $K_{ij} = \dfrac{Cov(y_i, y_j)}{\sqrt{Var(y_i)Var(y_j)}}$, которые являются коэффициентами корреляции. Из представления (7) следует, что

$$Var(y_i) = c^2 g_0\,,\ \ Cov(y_i, y_j) = c^2 g_{|i-j|}\,.$$

Поэтому $K = (1/g_0)G$. $K_n^{\mathrm{T}} = \mathbf{(}Var(y_i)\mathbf{)}^{-1}\mathbf{(}Cov(y_i\,, y_{i+n})\ \dots\ Cov(y_i\,, y_{i+n+m-1})\mathbf{)}$ – m-вектор-строка коэффициентов корреляции. Тогда $K_n^{\mathrm{T}} = (1/g_0)G_n^{\mathrm{T}}$. Поэтому выражения (13) – (15) могут быть записаны через корреляционные функции следующим образом:

$$D_{m,n} = Var(y_i)(1\ \ E_n^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} 1 & -K_n^T \\ -K_n & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ E_n \end{pmatrix}; \tag{13a}$$

$$E_n^{\mathrm{opt}} = K^{-1}K_n\ ; \tag{14a}$$

$$D_{m,n}^{opt} = Var(y_i)(1 - K_n^{\mathrm{T}}K^{-1}K_n) \tag{15a}$$

Таким образом, если мы подставим значения компонент вектора (14) (или вектора (14а)) в выражение (8), то получим оптимальную оценку предсказания. Эта оценка может быть написана в компактной форме, если использовать обозначение $Y_i = (y_i\ \ y_{i-1}\ \dots\ y_{i-m+1})$ – m-вектор-строка m последних наблюдений доходности:

$$\hat{y}_{i+n}^{opt} = Y_i E_n^{\mathrm{opt}} = Y_i G^{-1} G_n = Y_i K^{-1} K_n \tag{8a}$$

ДВА ПРОСТЫХ ВАРИАНТА ПРЕДСКАЗАНИЯ

Для сравнительного анализа удобно ввести два простых, но неоптимальных варианта предсказания.

Тривиальное предсказание. В этом случае мы выбираем оценку предсказания $\hat{y}_{i+n} = 0$. Следовательно, мы предполагаем, что доходность при погашении в момент $i+n$ будет равна своему среднему значению. В терминах формулы (8) это означает, что $E_{k,n} = 0$, $1 \le k \le m$. Дисперсия ошибки предсказания в этом случае равна

$$D_0 = E[(0 - y_{i+n})^2] = Var(y_i) = c^2 g_0\ . \tag{16}$$

Предсказание по последнему наблюдению. В этом случае оценка предсказания равна $\hat{y}_{i+n} = y_i$. Это значит, что мы предполагаем, что доходность при погашении в момент времени $i+n$ будет такой же, как и в момент времени i последнего наблюдения. Тогда дисперсия ошибки предсказания равна

$$D_1 = E[(y_i - y_{i+n})^2] = 2(Var(y_i) - Cov(y_i, y_{i+n})) = 2\,c^2(g_0 - g_n)\ . \tag{17}$$

В терминах формулы (8) это означает, что $E_{1,n} = 1$, $E_{k,n} = 0$, $1 < k \le m$. Сравнение выражений (16) и (17) показывает, что предсказание по последнему наблюдению может быть хуже, чем тривиальное предсказание. Это случается, когда $g_0 > 2g_n$.

Удобно измерять качество оценки предсказания через качество тривиального предсказания. Другими словами, уменьшение дисперсии ошибки предсказания удобно измерять относительной величиной

$$d_{m,n} = \frac{D_0 - D_{m,n}}{D_0} =$$
$$= (1/g_0)G_n^{\mathrm{T}}G^{-1}G_n = K_n^{\mathrm{T}}K^{-1}K_n = (E_n^{\mathrm{opt}})^{\mathrm{T}}KE_n^{\mathrm{opt}} . \qquad (18)$$

Так что
$$D_{m,n} = Var(y_i)(1 - d_{m,n}) . \qquad (13б)$$

Следует ожидать, что $0 < d_{m,n}^{opt} < 1$. Предсказание тем лучше, чем больше $d_{m,n}^{opt}$. Заметим, что это значение не зависит от параметра c процесса отклонений доходности при погашении.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

Интересно узнать, насколько увеличится мера $d_{m,n}^{opt}$, если мы используем дополнительное $(m + 1)$-е наблюдение для оценки предсказания (8). Это означает, что мы увеличиваем размерность вектора E_n до $(m + 1)$. В связи с этим в формулах для оценок предсказания нужно произвести некоторую модификацию, отражающую переход к более высокой размерности, но ее желательно ввести таким образом, чтобы легко было установить соответствие между прежними и модифицированными результатами. Для этого введем дополнительное обозначение:

$$K^{\mathrm{T}}(m) = \big(Var(y_i)\big)^{-1}\big(Cov(y_i\,, y_{i+m})Cov(y_i\,, y_{i+m-1}) \ldots Cov(y_i\,, y_{i+1})\big) .$$

$K^{\mathrm{T}}(m)$ является m-вектором-строкой, составленной из коэффициентов корреляции процесса (1). Тогда в формуле (18) для новой размерности вместо матрицы K нам следует использовать матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & K^T(m) \\ K^T(m) & K \end{pmatrix}$$

и вместо вектора K_n^{T} использовать вектор ($g_{n+m}/g_0 \quad K_n^{\mathrm{T}}$). Тогда мера $d_{m+1,n}$ примет вид:

$$d_{m+1,n} = (\, g_{n+m}/g_0 \quad K_n^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} 1 & K^T(m) \\ K^T(m) & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n+m}/g_0 \\ K_n \end{pmatrix} . \qquad (19)$$

Пусть q обозначает величину $q = \big(1 - K^{\mathrm{T}}(m)K^{-1}K(m)\big)^{-1}$. Тогда можно получить следующее выражение для меры (19):

$$d_{m+1,n} = d_{m,n} + q[g_{n+m}/g_0 - K^{\mathrm{T}}(m)E_n^{\mathrm{opt}}(m)]^2 . \qquad (20)$$

Второе слагаемое в этом выражении показывает приращение меры качества оптимального предсказания, если для его конструирования будет использовано дополнительное $(m+1)$-е наблюдение.

Когда мы добавляем $(m+1)$-ое наблюдение, коэффициенты предсказания $E_{k,n}$ также изменяются. Пусть $E_n^{\text{opt}}(m+1)$ представляет $(m+1)$-вектор-столбец новых коэффициентов. Этот вектор может быть выражен через вектор (14) следующим рекуррентным соотношением:

$$E_n^{\text{opt}}(m+1) = \begin{pmatrix} E_n^{opt}(m) - K^{-1}K(m)\sqrt{q\left(d_{m+1,n} - d_{m,n}\right)} \\ \sqrt{q\left(d_{m+1,n} - d_{m,n}\right)} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Верхний блок в правой части равенства является m-вектором-столбцом, который представляет m первых компонент вектора $E_n^{\text{opt}}(m+1)$. Нижний блок в правой части равенства является скалярной переменной, которая представляет $(m+1)$-ю компоненту этого вектора. Мы видим, что значение этой переменной существенно зависит от величины приращения меры (19). Если это приращение очень мало, то нет необходимости вводить какое-либо дополнительное наблюдение для построения оценки предсказания. Поэтому для выбора размерности вектора E_n можно использовать величину

$$(g_{n+m}/g_0 - K^{\text{T}}(m)E_n^{\text{opt}}(m))(1 - K^{\text{T}}(m)K^{-1}K(m))^{-1} = \sqrt{q\left(d_{m+1,n} - d_{m,n}\right)}.$$

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМА ОЦЕНОК

При увеличении выборочного множества наблюдений, оценки параметров модели и оценки предсказания должны пересчитываться. Предположим, что в момент времени i мы имеем выборочное множество $\{y_t\ ,\ 1 \le t \le i\}$. Введем систему обозначений для описания оценок по этой выборке. Пусть Y_k обозначает вектор, составленный из $\{y_t\}$

$$Y_k^{\text{T}} = Y_k^{\text{T}}(i) = (y_{p-k+1} \quad y_{p-k+2} \ \ldots\ y_{i-k}), \qquad 0 \le k \le p.$$

Этот вектор имеет $(i-p)$ компонент. Аргумент i этого вектора для краткости будет опускаться, когда не будет необходимости показывать его. $Y(i)$ – $(p\times p)$-матрица с компонентами $Y_k^{\text{T}}Y_l$, $1 \le k, l \le p$. $y(i)$ – p-вектор-столбец с компонентами $Y_k^{\text{T}}Y_0$, $1 \le k \le p$. b – p-вектор-столбец с компонентами b_j , $1 \le j \le p$. В этих обозначениях оценка максимального правдоподобия вектора параметров модели (1) является решением уравнения

$$Y(i)\, b = y(i)\ , \text{ т. е. } \ b(i) = Y(i)^{-1}\, y(i)\ . \tag{22}$$

Здесь уместно указать на один важный частный случай. Умножим левое равенство (22) на $c^2/(i-p)$. Тогда компоненты матрицы в левой части равенства будут иметь вид $\frac{c^2}{i-p}\sum_{t=1}^{i-p} y_{p-k+t}\, y_{p-l+t}$, а компоненты вектора в правой части примут форму $\frac{c^2}{i-p}\sum_{t=1}^{i-p} y_{p-k+t}\, y_{p+t}$. Поэтому с увеличением выборки, когда $(i-p)\to\infty$, упомянутые компоненты сходятся соответственно к $g_{|k-l|}$ и g_k. Таким образом, для больших i левое равенство (22) может быть написано в виде $Gb = G_1$, где G и G_1 являются матрицей и вектором, которые используются в формуле (14) при $m = p$, $n = 1$. Это значит, что решение уравнения (22) может быть написано как $b(i) = G^{-1} G_1$, т. е. для $m = p$, $n = 1$ коэффициенты оптимального предсказания $\{E_{k1}^{opt}\}$ совпадают с параметрами модели (1) $\{b_k\}$, иначе говоря, $E_{k1}^{opt} = b_k$, $1 \le k \le p$.

Когда появляется дополнительное $(i+1)$-е наблюдение, эта оценка должна быть модифицирована к виду

$$Y(i+1)\, b = y(i+1)\text{, т. е. } b(i+1) = Y(i+1)^{-1}\, y(i+1)\,. \tag{23}$$

Интересно найти рекуррентное взаимоотношение между оценками $b(i)$ и $b(i+1)$, которое могло бы упростить последовательный перерасчет оценок параметров модели. Заметим, что элементы матрицы $Y(i+1)$ имеет вид $y_{i+1-k}\, y_{i+1-l} + Y_k^{\mathrm{T}} Y_l$, $1 \le k, l \le p$. Пусть $u^{\mathrm{T}}(i) = (y_i \;\; y_{i-1} \;\; \dots \; y_{i+1-p})$ – p-вектор, содержащий p последних выборочных значений $\{y_t\}$. Тогда можно написать $Y(i+1) = Y(i) + u(i)\, u^{\mathrm{T}}(i)$. Используя лемму об обращении матриц мы можем получить равенство

$$\begin{aligned} Y(i+1)^{-1} &= [Y(i) + u(i)\, u^{\mathrm{T}}(i)]^{-1} = \\ &= Y(i)^{-1} - Y(i)^{-1} u(i)\, u^{\mathrm{T}}(i)\, Y(i)^{-1} [1 + u^{\mathrm{T}}(i)\, Y(i)^{-1} u(i)]^{-1}. \end{aligned} \tag{24}$$

Тогда равенство (23) может быть записано следующим образом:

$$b(i+1) = b(i) + [y_{i+1} - u^{\mathrm{T}}(i)\, b(i)]\, Y(i)^{-1} u(i)\, [1 + u^{\mathrm{T}}(i)\, Y(i)^{-1} u(i)]^{-1}. \tag{25}$$

Пара равенств (24) и (25) определяет рекуррентное взаимоотношение между оценками $b(i)$ и $b(i+1)$. Таким образом, параметры b модели (1) можно вычислять рекуррентно по формулам (24) и (25). Оценки предсказания (4) являются функциями вектора E_n, который зависит довольно сложным нелинейным образом от параметров модели b по формуле (14). Поэтому рекуррентные соотношения для оценок предсказания в общем случае будет более сложным, чем выражения (24) – (25). Для наиболее простого случая марковской модели, когда $p = 1$, $n = 1$ получаются наиболее простые формулы, поскольку $Y(i)$ оказывается скалярной переменной. Выражения (24) – (25) приобретают вид:

$$Y(i+1)^{-1} = Y(i)^{-1}\left(1 - \frac{y_i^2}{y_i^2 + Y(i)}\right) = \frac{1}{y_i^2 + Y(i)} ,$$

$$b(i+1) = \frac{Y(i)}{Y(i+1)} b(i) + \frac{y_i y_{i+1}}{y_i^2 + Y(i)} = \frac{Y(i)}{y_i^2 + Y(i)} b(i) + \frac{y_i y_{i+1}}{y_i^2 + Y(i)} .$$

Оценка предсказания тогда выражается в форме:

$$\overline{Y}_{i+2}(i+1) = y_{i+1} b(i+1) = \frac{y_{i+1} Y(i)}{y_i Y(i+1)} \overline{Y}_{i+1}(i) + \frac{y_i y_{i+1}^2}{y_i^2 + Y(i)} .$$

МАРКОВСКИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ДОХОДНОСТИ

Отклонения доходности при погашении от ее математического ожидания образуют марковский процесс, когда уравнение (1) является авторегрессией первого порядка, $AR(1)$, то есть при $p = 1$. В этом случае

$$y_i = b y_{i-1} + c z_{i-1} . \tag{26}$$

Процесс (26) является стационарным, если $|b| < 1$. Представление (7) имеет вид

$$y_i = c \sum_{k=0}^{\infty} b^k z_{i-k-1} . \tag{27}$$

Величина g_k в формуле (12) равна

$$g_k = \sum_{k=0}^{\infty} b^{2t+k} = \frac{b^k}{1-b^2} . \tag{28}$$

Матрица K принимает вид

$$K = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \dots & b^{m-1} \\ b & 1 & b & \dots & b^{m-2} \\ b^2 & b & 1 & \dots & b^{m-3} \\ \dots & .. & \dots & \dots & \dots \\ b^{m-1} & b^{m-2} & b^{m-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} . \tag{29}$$

Вектор K_n^{T} равен $(\, b^n \;\; b^{n+1} \;\; \ldots \;\; b^{n+m-1}\,)$. Обратная матрица K^{-1} может быть получена в явном виде

$$K^{-1} = \frac{1}{1-b^2}\begin{pmatrix} 1 & -b & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -b & 1+b^2 & -b & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -b & 1+b^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1+b^2 & -b \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -b & 1 \end{pmatrix} \qquad (30)$$

Подстановка этих выражений в формулы (14a), (15a) и (18) дает

$$E_n^{\mathrm{opt}} = (\, b^n \;\; 0 \;\; 0 \ldots 0\,)\,; \qquad (31)$$

$$D_{m,n}^{opt} = c^2\,\frac{1-b^{2n}}{1-b^2}\;; \qquad (32)$$

$$d_{m,n} = 1 - b^{2n}\,. \qquad (33)$$

Интересно заметить, что оптимальная оценка предсказания использует только одно наблюдение в марковском случае и имеет вид

$$\hat{y}_{i+n} = b^n y_i\,. \qquad (34)$$

Из равенства (33) следует, что качество оптимального предсказания в марковском случае экспоненциально уменьшается с увеличением n.

Дисперсия процесса (26) равна $Var(y_i) = c^2/(1 - b^2)$. Корреляционная функция этого процесса имеет вид $Cov(y_i\,, y_j)/Var(y_i) = b^{|\,j-i\,|} = e^{-\,|\,j-i\,|\ln(1/\,b)}$. Поскольку $|\,b\,| < 1$, $\ln(1/b) > 0$. Таким образом, можно принять уравнение (26) в качестве модели реальных данных, если выборочная корреляционная функция этих данных является близкой к экспоненциальной функции. Когда выборочная корреляционная функция принимает отрицательные значения или не является монотонно уменьшающейся, следует использовать более сложные модели процесса, нежели уравнение (26).

АВТОРЕГРЕССИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предположим, что отклонения доходности до погашения от ее среднего подчиняются следующему уравнению

$$y_i = b_1 y_{i-1} + b_2 y_{i-2} + c z_{i-1}\,. \qquad (35)$$

Этот процесс является стационарным, если неравенство

$$(1 - b_2)^2 > b_1^{\,2} \tag{36}$$

выполняется строго. Неравенство (36) является для этого не только достаточным, но и необходимым условием. В этом случае

$$H_t = \frac{f_2^{\,t+1} - f_1^{\,t+1}}{f_2 - f_1} \tag{37}$$

в терминах уравнения (4) . Для простоты рассуждений мы будем предполагать, что значения корней уравнения (3) являются вещественными. Если корни комплексные, анализ будет иметь некоторые формальные отличия, но его существо будет таким же.

$$g_k = \sum_{t=0}^{\infty} H_t H_{t+k} = \frac{\dfrac{f_2^{\,k+1}}{1 - f_2^2} - \dfrac{f_1^{\,k+1}}{1 - f_1^2}}{\left(1 - f_1 f_2\right)\left(f_2 - f_1\right)} \,. \tag{38}$$

Заметим, что справедливы следующие равенства:

$$f_1 f_2 = -\, b_2\,, \quad f_1 + f_2 = b_1\,, \quad f_{1,2} = \frac{b_1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4b_2}{b_1^2}}\right). \tag{39}$$

Коэффициенты предсказания (14) и мера качества (18) могут быть найдены для любых значений m и n путем использования формулы (37). Когда $m = 2$, коэффициенты предсказания (14) имеют вид

$$E_{1,n}^{opt} = \frac{g_0 g_n - g_1 g_{n+1}}{g_0^2 - g_1^2}\,, \qquad E_{2,n}^{opt} = \frac{g_0 g_{n+1} - g_1 g_n}{g_0^2 - g_1^2}$$

и мера качества (18) равна

$$d_{2,n} = \left(g_n E_{1,n}^{opt} + g_{n+1} E_{2,n}^{opt}\right) \Big/ g_0 \,.$$

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Когда вычислена оценка предсказания (8) для отклонения доходности от ее среднего, можно построить интервальную оценку предсказания доходности. Интервальные оценки более информативны, поскольку они дают интервал возможных значений с заданной вероятностью правильного решения. Чтобы построить интервальную оценку, необходимо знать распределение точечной оценки (8). Поскольку случайные величины $\{z_t\}$ в равенстве (1) являются нормально распределенными и соотношения (1) и (8) являются линейными, точечная оценка (8) тоже нормально распределена. Ее математическое ожидание равно нулю, а ее дисперсия равна

$$Var(\hat{y}_i) = c^2 E_n^{\mathrm{T}} G E_n \tag{40}$$

с точностью до параметра c^2. Этот параметр можно оценить с помощью соотношения (1). Действительно, когда задано выборочное множество $\{y_t,\ 1 \le t \le i\}$, мы имеем из уравнения (1)

$$c^2 \frac{1}{i-p} \sum_{t=1+p}^{i} z_{t-1}^2 = \frac{1}{i-p} \sum_{t=1+p}^{i} \left(y_t - \sum_{j=1}^{p} b_j y_{t-j} \right)^2 . \tag{41}$$

Множитель при c^2 в левой части равенства является эмпирическим средним z_t^2, то есть он представляет собой оценку дисперсии случайных величин z_t, но эта дисперсия равна единице по предположению. Поэтому правая часть равенства (41) является несмещенной оценкой параметра c^2. Пусть u_α обозначает квантиль стандартного нормального распределения на уровне $(1 - 0{,}5\alpha)$. Тогда доверительный интервал для значений доходности при погашении на уровне значимости α имеет вид

$$\{\, Y + \hat{y}_{i+n} - u_\alpha \sqrt{Var(\hat{y})}\ ,\ Y + \hat{y}_{i+n} - u_\alpha \sqrt{Var(\hat{y})}\ \} , \tag{42}$$

где Y – выборочное среднее значение доходности по исходному выборочному множеству цитируемой доходности (или ее тренд, если доходность не стационарна). $Var(\hat{y}_i)$ определяется по формулам (40) и (41), $\hat{y}_{i+n}$ вычисляется по формуле (8).

Пример. В качестве примера рассмотрим ставки кривых доходности ценных бумаг Казначейства США за ноябрь 1995 г. Данные за 1 - 27 ноября (18 деловых дней) будут выборочными наблюдениями для предсказания значения кривых доходности на 28 ноября. Верное значение ставки доходности для трехмесячного билета равно 5,53. Среднее значение данных за 1 - 27 ноября равно 5,52.

Оценка параметра b марковской модели составляет 0,71405. Оценка предсказания доходности при помощи марковской модели равна 5,505878.

Оценки параметров модели AR(2) равны: b_1 = 0,77550, b_2 = – 0,14691. Численные результаты для различных значений параметра m представлены в табл. 2. Эти результаты показывают, что точность предсказания по множеству из 18 наблюдений является невысокой. Точность предсказания с помощью марковской модели несколько хуже, чем точность предсказания при помощи модели $AR(2)$. В модели $AR(2)$ имеет смысл использовать для предсказания только два наблюдения, поскольку третье наблюдение практически не увеличивает меру эффективности d и величина третьего коэффициента предсказания E_{31} практически равна нулю. Коэффициенты оптимального предсказания принимают практически те же самые значения, что и коэффициенты модели даже для такого малого объема выборки, как 18 наблюдений.

Таблица 2

Вычисляемое значение		$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
Мера d_{m1}		0,457199	0,468913	0,468914
Коэффициенты предсказания	E_{11}	0,676165	0,775498	0,775498
	E_{21}		– 0,14691	– 0,14691
	E_{31}			$1{,}3\times10^{-8}$
Оценка предсказания		5,506657	5,510573	5,510573

Второе выборочное множество образовано данными от 10 августа 1995 г. до 3 января 1996 г. (100 значений доходности), и предсказываемым значением является доходность для 4 января 1996 г. ($n = 1$). Численные результаты предсказания представлены в таблицах 3, 4, 5. Структура таблиц и обозначения следующие: в первых столбцах всех таблиц (3, 4 и 5) показаны сроки погашения. Во вторых столбцах таблиц 3 и 5 показаны истинные значения доходности. В 3 – 5-х столбцах таблиц 3 и 5 показаны точечные и интервальные оценки доходности. Последние три столбца табл. 3 показывают результаты вычисления параметров и характеристик марковской модели (26): оценки B параметра b по формуле (22) для $p = 1$, качество предсказания d_{11} для марковской модели по формуле (33) и суммарную квадратичную невязку, вычисленную по формуле

$$MSD = \sum_{t=1}^{99}\left(y_{t+1} - \hat{b}y_t\right)^2$$

Эта величина отражает точность представления процесса доходности моделью (26). Второй и третий столбцы табл. 4 дают значения оценок $B1$, $B2$ параметров b_1, b_2 модели $AR(2)$ в формуле (22) для $p = 2$. Следующие четыре столбца представляют значения g_k, $k = 0, 1, 2, 3$, которые вычисляются по формулам (38). Последние два столбца таб. 4 дают коэффициенты предсказания модели $AR(2)$ $E11$ и $E21$, которые вычисляются по формуле (14) для $n = 2$, $m = 2$. Шестой и седьмой столбцы табл. 5 дают значения меры качества $QUAL.1 = d_{11}$, $QUAL.2 = d_{21}$ для модели $AR(2)$. Следующий столбец показывает суммарную квадратичную невязку для модели (35), вычисленную по формуле

$$MSD = \sum_{t=1}^{98}\left(y_{t+2} - B1y_{t+1} - B2y_t\right)^2 ,$$

которая отражает точность представления процесса доходности моделью (35). Последний столбец табл. 5 дает разность величин

$$DIFF. = MSD(\text{табл. } 3) - MSD(\text{табл. } 5),$$

которая показывает увеличение точности представления процесса доходности при переходе от марковской модели (26) к модели AR(2) (уравнение (35)).

Таблица 3

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ДАННЫХ 1995 г.								
Срок погашения	ДОХОДНОСТЬ		ДОВЕРИТ. ГРАНИЦ.		ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ			
	ФАКТИЧ.	ОЦЕНКА	НИЖНЯЯ	ВЕРХНЯЯ	B	КАЧЕСТВО	MSD	E1
0,25	5,19	5,20	5,01	5,38	0,9258	0,8571	0,1499	0,9258
0,5	5,23	5,22	5,12	5,32	0,8248	0,6803	0,1243	0,8248
1	5,19	5,17	5,07	5,26	0,7831	0,6133	0,1382	0,7831
2	5,17	5,17	5,06	5,29	0,7970	0,6353	0,1724	0,7970
3	5,26	5,22	5,11	5,34	0,7937	0,6299	0,1913	0,7937
5	5,39	5,37	5,25	5,49	0,8025	0,6440	0,2065	0,8025
7	5,55	5,50	5,37	5,63	0,8235	0,6782	0,2053	0,8235
10	5,65	5,59	5,45	5,72	0,8551	0,7312	0,1753	0,8551
20	6,08	6,02	5,90	6,14	0,8275	0,6848	0,1691	0,8275
30	6,03	5,97	5,86	6,07	0,8171	0,6677	0,1481	0,8171

Таблица 4

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ МОДЕЛИ AR(2) ДЛЯ ДАННЫХ 1995 г.								
Срок погашения		ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ						
	B1	B2	g0	g1	g2	g3	E11	E21
0,25	1,0512	-0,1367	7,0365	6,5070	5,8781	5,2893	1,0512	-0,1367
0,5	0,7003	0,1437	3,0834	2,5216	2,2090	1,9094	0,7003	0,1437
1	0,8261	-0,0292	2,8134	2,2582	1,7833	1,4072	0,8261	-0,0292
2	0,9130	-0,1218	3,0071	2,4476	1,8685	1,4079	0,9130	-0,1218
3	0,9415	-0,1605	3,0032	2,4365	1,8120	1,3149	0,9415	-0,1605
5	0,9437	-0,1613	3,0234	2,4570	1,8311	1,3317	0,9416	-0,1582
7	0,9809	-0,1827	3,3136	2,7481	2,0901	1,5479	0,9809	-0,1827
10	1,0305	-0,2042	3,8989	3,3366	2,6423	2,0417	1,0305	-0,2042
20	0,9179	-0,1060	3,2507	2,6981	2,1322	1,6713	0,9179	-0,1060

Таблица 5

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ МОДЕЛИ AR(2) ДЛЯ ДАННЫХ 1995 г. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРЕДСКАЗАНИЯ								
Срок погашения	ДОХОДНОСТЬ		ДОВЕРИТ. ГРАНИЦ.		ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ			
	ФАКТИЧ.	ОЦЕНКА	НИЖНЯЯ	ВЕРХНЯЯ	QUAL. 1	QUAL. 2	MSD	DIFF.
0,25	5,19	5,20	5,01	5,38	0,8552	0,8579	0,1466	0,0034
0,5	5,23	5,23	5,13	5,32	0,6688	0,6757	0,1174	0,0069
1	5,19	5,17	5,07	5,26	0,6443	0,6446	0,1305	0,0077
2	5,17	5,17	5,06	5,29	0,6625	0,6675	0,1619	0,0106
3	5,26	5,21	5,10	5,33	0,6582	0,6670	0,1740	0,0173
5	5,39	5,37	5,25	5,49	0,6604	0,6694	0,1869	0,0196
7	5,55	5,50	5,37	5,63	0,6878	0,6982	0,1854	0,0200
10	5,65	5,59	5,45	5,72	0,7324	0,7435	0,1601	0,0151
20	6,08	6,02	5,90	6,14	0,6889	0,6924	0,1571	0,0119
30	6,03	5,97	5,87	6,07	0,6665	0,6711	0,1374	0,0107

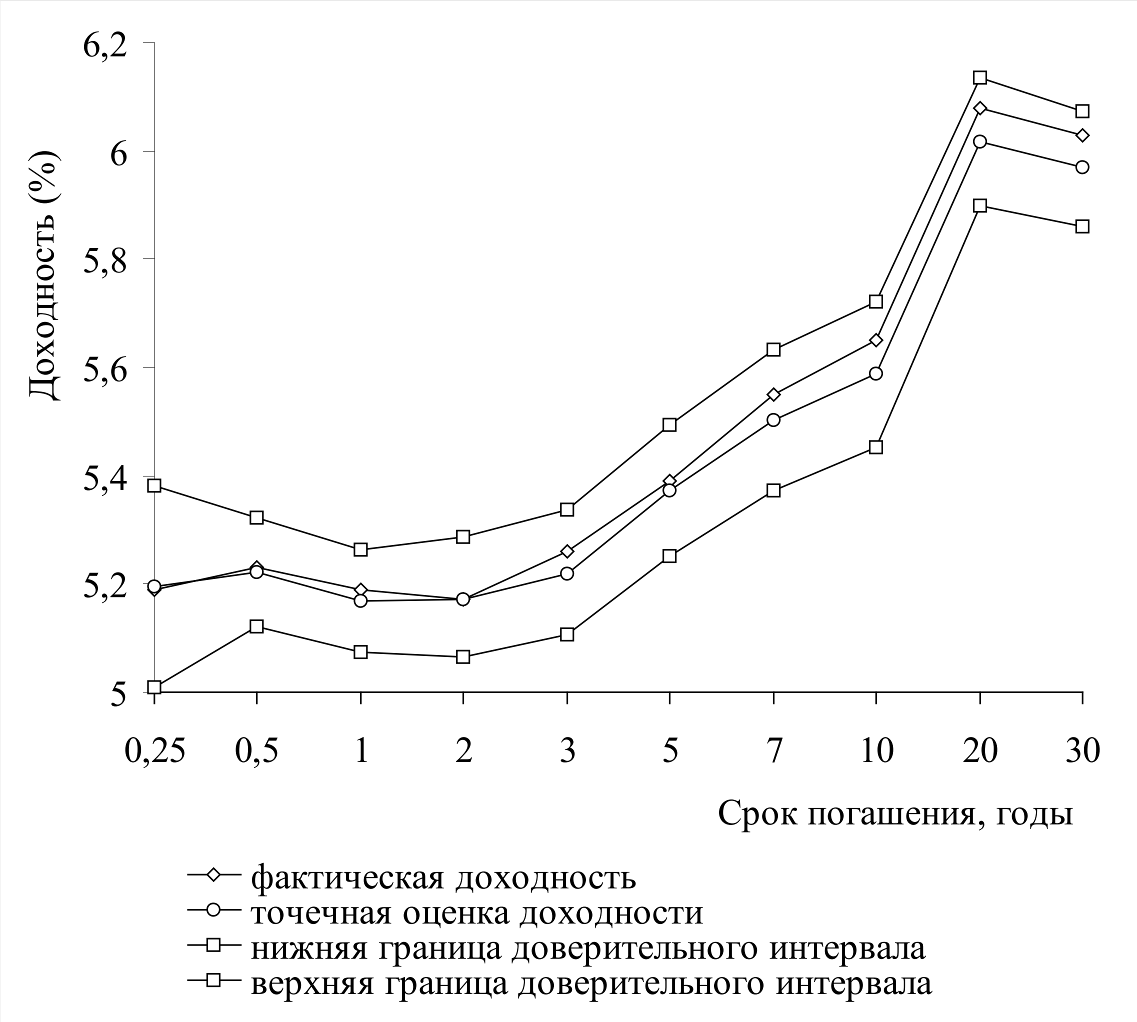


Рис. 1. Точечная и интервальная оценки доходности до погашения. Интервальная оценка определялась на уровне значимости 0,05.

Истинные значения доходности и их оценки представлены на рис. 1. Доверительные интервалы на рисунке даны для уровня значимости 0,05.

5.3 МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ПРЕДСКАЗАНИЯ

Анализ ставок доходности ценных бумаг для различных сроков погашения показывает, что эти ставки сильно коррелированны. Ниже приведена таблица 1, составленная из коэффициентов корреляции между ставками доходности ценных бумаг Казначейства США для различных сроков до погашения по данным 1995 г.

Как видно из этой таблицы, коэффициенты корреляции между доходностями ценных бумаг различных сроков погашения принимают достаточно большие значения (от 0,3607 до 0,9961). Это означает, что совместная обработка данных может улучшать предсказание будущих доходностей до погашения.

Такой подход приводит к матричным моделям случайных процессов ставок доходности.

Таблица 1

Коэффициенты корреляции ставок доходности для 1995 г.

Срок погашения	Срок погашения					
	6 месяцев	1 год	2 года	5 лет	10 лет	30 лет
3 месяца	0,8184	0,6671	0,5812	0,5033	0,4386	0,3607
6 месяцев	1,0000	0,9663	0,9234	0,8741	0,8194	0,7411
1 год	0,9663	1,0000	0,9860	0,9585	0,9176	0,8532
2 года	0,9234	0,9860	1,0000	0,9884	0,9613	0,9150
3 года	0,9008	0,9754	0,9968	0,9957	0,9767	0,9364
5 лет	0,8741	0,9585	0,9841	1,0000	0,9906	0,9597
7 лет	0,8411	0,9354	0,9763	0,9957	0,9957	0,9769
10 лет	0,8194	0,9176	0,9613	0,9906	1,0000	0,9853
20 лет	0,7508	0,8624	0,9235	0,9652	0,9873	0,9961

МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ

Пусть q обозначает число рассматриваемых сроков погашения; Y_{ij} обозначает отклонение i-го значения доходности для j-го срока доходности от его среднего значения; $1 \le j \le q$; $Y_i = (Y_{i1}, Y_{i2} \ldots Y_{iq})$ – q - вектор-строка величин отклонений для времени i . Матричная марковская модель является многомерной авторегрессионной моделью первого порядка, которая имеет вид:

$$Y_{i+1} = Y_i B + cW_i \, , \tag{1}$$

где $W_i = (W_{i1}\, W_{i2} \ldots W_{iq})$ - q - вектор-строка случайных величин (обычно предполагается, что случайные величины $\{W_{ij}\}$ распределены по нормальному закону и для различных i и j являются взаимно независимыми и имеют нулевые средние и одинаковые дисперсии, которые равны единице); c – скалярный параметр. $B = (B_{uv})$ – $q\times q$-матрица параметров модели. Таким образом, модель (1) определяется при помощи q^2 параметров B_{uv} и одного параметра c . Эти параметры можно оценить, если имеется множество наблюдений $\{Y_{i+1-t}\, ,1\le t \le N\}$ достаточного объема. Для простоты мы не делаем различий между обозначениями случайных величин процесса (1) и их выборочных значений, а также между параметрами модели и их оценками. Поскольку плотность вероятностей векторов W_i известна, естественно строить оценки максимального правдоподобия параметров B_{uv}. Для момента времени i они образуют матрицу

$$B(N) = \left(\sum_{t=2}^{N} Y_{i+1-t}^{T} Y_{i+1-t} \right)^{-1} \sum_{t=2}^{N} Y_{i+1-t}^{T} Y_{i+2-t} \; . \tag{2}$$

Заметим, что уравнение (2) можно переписать в виде

$$B(N)=\left(c^2\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}Y_{i+1-t}^{T}Y_{i+1-t}\right)^{-1}c^2\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}Y_{i+1-t}^{T}Y_{i+2-t}.$$

Если процесс (1) является стационарным, при достаточно слабых предположениях регулярности с вероятностью 1 имеет место следующее предельное соотношение:

$$\lim_{N\to\infty}B(N)=\left[Cov(Y_i,Y_i)\right]^{-1}\left[Cov(Y_i,Y_{i+1})\right]=B$$

Здесь $Cov(Y_i,Y_i)$ и $Cov(Y_i,Y_{i+1})$ являются матрицами кросс-корреляции компонент многомерного процесса (1) для совпадающих моментов времени и различающихся соответственно на 1.

Для того чтобы процесс, порождаемый моделью (1), был стационарным, необходимо и достаточно, чтобы абсолютные значения всех собственных чисел матрицы B были строго меньше единицы. Это является условием существования матриц

$$H_k=\sum_{t=0}^{\infty}\left(B^t\right)^T B^{t+k}=H_0B^k,\ \ k=1,2,\ldots,\tag{3}$$

которые будут использованы для построения оценок предсказания процесса (1).

Рассмотрим задачу предсказания вектора Y_{i+n}, если имеется выборка наблюдений $\{Y_{i+1-t},\ 1\le t\le N\}$. Поскольку модель (1) является линейной относительно векторов Y_i, оценку предсказания вектора Y_{i+n} естественно конструировать в линейной форме

$$\hat{Y}_{i+n}=\sum_{k=1}^{m}Y_{i+1-k}E_{kn}.\tag{4}$$

Здесь E_{kn}, $1\le k\le m$, - $q\times q$-матрицы параметров оценок предсказания. Мы будем искать такие матрицы E_{kn}, которые являются оптимальными в среднеквадратическом смысле, то есть вектор ошибок предсказания $\Delta Y_{i+n}=\hat{Y}_{i+n}-Y_{i+n}$ имеет нулевое математическое ожидание и минимальную суммарную дисперсию компонент ошибок предсказания. Это значит, что должна быть решена задача

$$D_{mn}=E[\Delta Y_{i+n}\Delta Y_{i+n}^{\mathrm{T}}]\to\min\tag{5}$$

относительно матриц E_{kn}. Вид уравнений (1) и (4) гарантирует, что математическое ожидание вектора ошибок равно нулю, то есть $E[\Delta Y_{i+n}]=0$.

Из уравнения (1) следует, что при выполнении условия стационарности процесса

$$Y_{i+1}=c\sum_{t=0}^{\infty}W_{i-t}B^{t}. \tag{6}$$

Используя представление (6) в соотношениях (1) и (4), мы можем получить формулу для суммы дисперсий D_{mn} в виде

$$D_{mn}=c^{2}\left[trH_{0}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}tr\left\{E_{kn}E_{\ln}^{T}\sum_{t=\max(k,l)}^{\infty}\left(B^{t-l}\right)^{T}B^{t-k}\right\}\right]-$$

$$-c^{2}\left[\sum_{k=1}^{m}tr\left\{E_{kn}H_{n+k-l}^{T}\right\}+\sum_{l=1}^{m}tr\left\{E_{\ln}^{T}H_{n+l-1}\right\}\right]. \tag{7}$$

Здесь trH обозначает след матрицы H. Матрицы H были введены равенством (3). Заметим, что из представления (6) следует, что матрицы H_k связаны с кросс-корреляционными матрицами соотношениями

$$Cov(Y_i,Y_i)=c^{2}H_0 \quad \text{и} \quad Cov(Y_i,Y_{i+k})=c^{2}H_k.$$

Поскольку выражение (7) является выпуклой функцией относительно элементов матрицы E_{kn}, сумма дисперсий D_{mn} имеет единственный минимум на множестве матриц E_{kn}. Дифференцирование D_{mn} по элементам матрицы E_{kn} и приравнивание к нулю производных дает систему уравнений для матрицы E_{kn} в виде

$$\sum_{k=1}^{j-1}H_{j-k}E_{kn}+H_0E_{jn}+\sum_{k=j+1}^{m}H^{T}E_{kn}=H_{n+j-1},\ 1\le j\le m. \tag{8}$$

Единственный минимум функции (7) гарантирует существование единственного решения системы (8). Это решение является очень простым:

$$E_{1n}=B^{n},\ E_{kn}=0,\ 1\le k\le m. \tag{9}$$

Действительно, оно следует из определения (3), где $H_k=H_0B^k$. Слагаемое с E_{1n} в левой части уравнения (8) равно $H_{j-1}E_{1n}$, а правая часть уравнения равна $H_{n+j-1}=H_{j-1}B^{n}$. Система уравнений (8) будет удовлетворяться, если мы выберем решение с помощью равенств (9). Из-за единственности решения никаких других решений не существует.

Таким образом, для матричной марковской модели оптимальная оценка предсказания $\hat{Y}_{i+n}$ использует только последнее наблюдение Y_i для предсказания вектора Y_{i+n} :

$$\hat{Y}_{i+n} = Y_i B^n , \tag{10}$$

где матрица B вычисляется по формуле (2). Подставляя решение системы (8) в выражение (7) для суммы дисперсий D_{mn} , мы получим значение, которое дает суммарную среднеквадратическую точность оценки предсказания (10):

$$D_{mn}^{opt} = c^2 \, tr\{H_0[I - (B^n)(B^n)^{\mathrm{T}}]\} , \tag{11}$$

где I является единичной матрицей. Оценка параметра c^2 может быть найдена путем подстановки представления (2) в выражение (1) вместо матрицы B . Оставляя детали для более сложного случая, рассмотренного ниже, мы запишем выражение несмещенной оценки параметра c^2 для марковской модели:

$$c^2 = \frac{1}{q(N-1)} tr\left\{ \sum_{t=1}^{N-1} Y_{i+1-t}^T Y_{i+1-t} - \sum_{t=2}^{N} Y_{i+2-t}^T Y_{i+1-t} B \right\} ,$$

где $tr\{A\}$ обозначает след матрицы A , а B вычисляется по формуле (2).

АВТОРЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Анализ матричных моделей в виде авторегрессий более высокого порядка является более сложным. Например, рассмотрим случай второго порядка, когда процесс Y_i описывается уравнением

$$Y_{i+1} = Y_i B_1 + Y_{i-1} B_2 + c W_i . \tag{12}$$

Введем для краткости следующие обозначения

$$U_N = \begin{pmatrix} \sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t-N}^T Y_{i+t-N} & \sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t-N}^T Y_{i+t-1-N} \\ \sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t-1-N}^T Y_{i+t-N} & \sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t-1-N}^T Y_{i+t-1-N} \end{pmatrix}^{-1} ,$$

$$V_N = \begin{pmatrix} \sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t-N}^T Y_{i+t+1-N} \\ \sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t-1-N}^T Y_{i+t+1-N} \end{pmatrix} .$$

Тогда оценка максимального правдоподобия матриц B_1 и B_2 может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = U_N V_N \ .$$

Заметим, что в рассматриваемом случае также, как и для описанной выше марковской модели, с вероятностью 1 имеет место следующее предельное соотношение при $N \to \infty$:

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cov(Y_t, Y_t) & Cov(Y_t, Y_{t-1}) \\ Cov(Y_{t-1}, Y_t) & Cov(Y_t, Y_t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Cov(Y_t, Y_{t+1}) \\ Cov(Y_{t-1}, Y_{t+1}) \end{pmatrix} .$$

Для кросс-корреляционной матрицы при различных индексах справедливо равенство

$$Cov(Y_{t+k}\ , Y_t) = Cov(Y_t\ , Y_{t+k})^{\mathrm{T}} \ .$$

Если процесс Y_t является стационарным, то матрица $Cov(Y_t\ , Y_{t+k})$ не зависит от значения индекса t .

Используя это представление в соотношении (12) можно получить равенство

$$c^2 J_N = \frac{1}{N-2}\left[\sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t+1-N}^T Y_{i+t+1-N} - \left(B_1^T B_2^T\right) U_N^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\right],$$

где через $J_N = \frac{1}{N-2}\sum_{t=2}^{N-1} W_{i+t-N}^T W_{i+t-N}$ обозначена $(q \times q)$ - матрица с элементами $\left(J_N\right)_{uv} = \frac{1}{N-2}\sum_{t=2}^{N-1} W_{tu} W_{tv}$, а $\{W_{tu}\}$ являются нормальными случайными величинами с нулевыми математическими ожиданиями, которые взаимно независимы и имеют одинаковую дисперсию, равную единице. Поэтому из закона больших чисел следует, что

$$(J_N)_{uu} \to 1\ , (J_N)_{uv} \to 0\ ,\ u \neq v\ , \ \text{ при } N \to \infty .$$

Таким образом, несмещенную оценку величины c^2 можно получить в виде

$$c^2 = \frac{1}{q(N-2)}\left[\sum_{t=2}^{N-1} Y_{i+t+1-N}^T Y_{i+t+1-N} - V_N^T U_N V_N\right].$$

Пусть D обозначает диагональную матрицу с оператором временной задержки на главной диагонали, то есть $Y_{t-1} = Y_t D$. Тогда рекуррентному соотношению (12) можно придать вид

$$Y_{i+1}(I - DB_1 - D^2 B_2) = cW_i \quad \text{или} \quad Y_{i+1} = cW_i(I - DB_1 - D^2 B_2)^{-1}. \quad (13)$$

Теперь задачей является представление обратной матрицы, стоящей в правой части, в виде полинома по операторам D. Предположим, что такое представление имеет вид

$$(I - DB_1 - D^2 B_2)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} D^t F_t \,. \quad (14)$$

Тогда мы имеем соотношение

$$Y_{i+1} = cW_i \sum_{t=0}^{\infty} D^t F_t = c\sum_{t=0}^{\infty} W_{i-t} F_t \quad (15)$$

вместо представления (6) и анализ является аналогичным марковскому случаю. Аналитическими методами получить представление (15) очень трудно. Но очень просто найти его алгоритмически. Действительно, используя уравнение (12) как рекуррентное соотношение мы можем получить представление (15) в виде

$$Y_{i+1} = c\sum_{t=0}^{\infty} W_{i-t} F_t \ ,$$

где матрицы F_t вычисляются рекуррентно, а $F_0 = I$ - единичная матрица,

$$F_1 = B_1 \,,\ F_{t+1} = F_t B_1 + F_{t-1} B_2 \,, \qquad t = 1, 2, \dots \,. \quad (16)$$

Заметим, что в авторегрессионной модели порядка p

$$Y_{i+1} = \sum_{j=1}^{p} Y_{i+1-j} B_j + cW_i \quad (17)$$

представление (15) также возможно и в этом случае матрицы F_t могут быть вычислены по рекуррентной формуле

$$F_{t+1} = \sum_{j=1}^{p} F_{t+1-j} B_j \,,\ t > 0 \,,\ F_0 = I \,,\ F_t = 0 \,,\ t < 0 \,. \quad (18)$$

Поэтому последующий анализ является справедливым для авторегрессионных моделей произвольного порядка, то есть, по существу, мы будем рассматривать модель (17) вместо модели (12).

Будем искать оценку предсказания тоже в виде (4). Тогда получим

$$\hat{Y}_{t+n} = c\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t=0}^{\infty} W_{i-t-k} F_t\right) E_{kn} = c\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{t=k}^{\infty} W_{i-t} F_{t-k}\right) E_{kn} = c\sum_{t=1}^{\infty} W_{i-t}\left(\sum_{k=1}^{\min(t,m)} F_{t-k} E_{kn}\right). \tag{19}$$

Распространим обозначение (3) на произвольные матрицы F_t

$$H_k = \sum_{t=0}^{\infty} F_t^T F_{t+k}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{20}$$

(Для модели (1) в этой формуле $F_t = B^{\,t}$.**)** H_k является $(q\times q)$ - матрицей. Из формулы (15) следует, что

$$Cov(Y_t\,,\, Y_{t+k}) = c^2 H_k\,,\; Cov(Y_{t+k}\,,\, Y_t) = c^2 H_k^{\mathrm{T}}\,.$$

Матрица ковариации ошибки предсказания $\varDelta Y_{i+n} = \hat{Y}_{i+n} - Y_{i+n}$ имеет вид

$$E\left[\Delta Y_{i+n}^T \Delta Y_{i+n}\right] = c^2\left(I\;\; E_n^T\right)\begin{pmatrix} H_0 & -G_n^T \\ -G_n^T & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ E_n \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где использованы обозначения: $E_n^T = \left(E_{1n}^T\;\; E_{2n}^T\;\; \ldots E_{mn}^T\right)$ - $(q\times qm)$ - матрица коэффициентов предсказания; $G_n^T = \left(H_n^T\;\; H_{n+1}^T\;\; \ldots H_{n+m-1}^T\right)$ - $(q\times qm)$-матрица, составленная из матриц H_k^{T} ; $G = (G_{ij})$ - $(qm\times qm)$-матрица, составленная из $(q\times q)$-матричных блоков G_{ij} , которые определяются следующими равенствами

$$G_{ii} = H_0\,,\; G_{ij} = H_{i-j} \;\text{ для }\; i > j\,,\; G_{ij} = H_{j-i}^{\mathrm{T}} \;\text{ для }\; i < j\,. \tag{22}$$

Главная диагональ корреляционной матрицы (21) составлена из дисперсий ошибок предсказания компонент вектора Y_{i+n} . Поэтому оптимальные матрицы $\{E_{kn}\}$ должны минимизировать след матрицы (21). Такие матрицы являются решениями системы уравнений (8), где матрицы H_k определяются формулой (17). Система (8) может быть записана с помощью принятых обозначений в следующем виде: $GE_n = G_n$. Это означает, что оптимальные матрицы E_{kn} составляют матрицу

$$E_n^{opt} = G^{-1} G_n\,. \tag{23}$$

Корреляционная матрица (21) для оптимальных матриц E_n^{opt} преобразуется к виду

$$E[(\hat{Y}_{i+n}^{opt} - Y_{i+n})^{\mathrm{T}}(\hat{Y}_{i+n}^{opt} - Y_{i+n})] = c^2(H_0 - G_n^{\mathrm{T}} G^{-1} G_n) . \qquad (24)$$

Заметим, что формула (18) справедлива для модели (1), поэтому формула (24) для модели (1) справедлива тоже. Обозначения согласовываются при помощи равенств

$$G_n = H_n = H_0 B^n , \quad G = H_0 . \qquad (25)$$

Укажем на один важный частный случай, когда $m = p$, $n = 1$, когда справедливо равенство $E_n^{opt} = (E_{11}\, E_{21}\ \ldots\ E_{p1})^{\mathrm{T}} = (B_1\, B_2\ \ldots\ B_p)^{\mathrm{T}}$, которое следует из того факта, что в этом частном случае матрицы $\{E_{k1}\}$ и $\{B_k\}$ вычисляются по одинаковым формулам через кросс-корреляционные матрицы. Этот факт является важным, поскольку нет необходимости вычислять матрицы $\{F_k\}$ и $\{H_k\}$ по формулам (18) и (20), а достаточно использовать оценки матриц $\{B_k\}$.

ВЫБОР ПАРАМЕТРА *m* ОЦЕНКИ ПРЕДСКАЗАНИЯ

Поскольку мерой оптимальности оценки предсказания является сумма дисперсий компонент вектора ошибок предсказания, то есть след D_{mn}^{opt} корреляционной матрицы (24), для общей модели мы имеем

$$D_{mn}^{opt} = c^2\, tr\{H_0 - G_n^{\mathrm{T}} G^{-1} G_n\} = c^2\, [tr\{H_0\} - tr\{G_n^{\mathrm{T}} G^{-1} G_n\}] =$$

$$= c^2\, tr\{H_0\}\, [1 - tr\{G_n^{\mathrm{T}} G^{-1} G_n\}/tr\{H_0\}] . \qquad (26)$$

Величина

$$d_{mn} = tr\{G_n^{\mathrm{T}} G^{-1} G_n\}/tr\{H_0\} , \quad 0 \le d_{mn} \le 1 , \qquad (27)$$

определяет качество предсказания. Когда $d_{mn} = 0$, оценка предсказания имеет ту же самую эффективность, что и тривиальное предсказание, то есть $\hat{Y}_{i+n} = 0$ (отклонение предсказываемого вектора от среднего равно нулю). Чем больше d_{mn} , тем больше эффективность. Величина d_{mn} может помочь выбрать параметр m - число наблюдений, которые используются для конструирования оценки (4). Действительно, если параметр m увеличить на единицу, то значение d_{mn} увеличится до значения $d_{m+1,\,n}$, так что

$$d_{m+1,\,n} - d_{mn} = tr\{A^{\mathrm{T}} B A\}\ /\ tr\{H_0\} ,$$

где символ A обозначает матрицу $[H(m) G^{-1} G_n - H_{n+m}]$, B обозначает матрицу $[H_0 - H(m) G^{-1} H(m)^{\mathrm{T}}]^{-1}$, $H(m) = [H_m\, H_{m-1}\ \ldots\ H_1]$ - $(q \times qm)$ - матрица, составленная из H_k, $1 \le k \le m$. Приращение $d_{m+1,\,n} - d_{mn}$ является неотрицательным, так как определяется следами неотрицательно определенной матрицы (числитель) и положительно определенной матрицы (знаменатель). Если величина $(d_{m+1,\,n} - d_{mn})/d_{mn} = O(1)$ или больше, тогда желательно использовать для оценки предсказания $(m + 1)$ наблюдений. Если же отношение $(d_{m+1,\,n} - d_{mn})/d_{mn}$ оказывается очень малым по абсолютной величине, можно ограничиться только m наблюдениями. Таким образом можно последовательно определить величину параметра m оценки предсказания (4). Как пример рассмотрим марковский случай. Если $m = 1$, то $G_n = H_n = H_0B^n$, $G = H_0$. $H(m) = H_1 = H_0B$. Тогда

$$H(m)G^{-1}G_n - H_{n+m} = (H_0B)^{\mathrm{T}}H_0^{-1}\,H_0B - H_0B^{n+1} = 0\,.$$

Это означает, что $d_2 - d_1 = 0$ и второе наблюдение не улучшает оценку предсказания.

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Модели (1), (12) и (17) являются линейными, оценка предсказания (4) – тоже линейная. Поэтому ошибка оценки предсказания оказывается q-мерной случайной величиной, которая имеет нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей (24). Это позволяет построить интервальные оценки в форме доверительных интервалов, которые обычно более информативны, чем точечные оценки (4). Пусть уровни значимости α_k заданы для каждой компоненты оценки предсказания (4), $1 \le k \le q$. Тогда доверительные интервалы будут иметь вид

$$\left\{A_k + \hat{Y}_{i+n,k} - u_{\alpha k}\sqrt{Var\left(\hat{Y}_{i+n,k}\right)},\, A_k + \hat{Y}_{i+n,k} + u_{\alpha k}\sqrt{Var\left(\hat{Y}_{i+n,k}\right)}\right\}, \tag{28}$$

где A_k - среднее значение наблюдений k-й компоненты; $\hat{Y}_{i+n,k}$ - оценка предсказания отклонения k-й компоненты от среднего значения; $Var(\hat{Y}_{i+n,k})$ - k-й элемент главной диагонали корреляционной матрицы оценки $\hat{Y}_{i+n,k}$, которая имеет вид

$$Cov(\hat{Y}_{i+n,k}, \hat{Y}_{i+n,k}) = c^2 (E_n^{opt})^{\mathrm{T}} G (E_n^{opt})\,. \tag{29}$$

Оценка параметра c^2 дана выше; $u_{\alpha k}$ - квантиль стандартного нормального распределения на уровне $(1 - \alpha_k/2)$. Таким образом, предсказываемая k-я компонента вектора доходности принадлежит интервалу (29) с вероятностью $(1 - \alpha_k)$.

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМА ОЦЕНКИ

Иногда удобно после получения следующего ($i + 1$)-го наблюдения при построении новой оценки предсказания использовать результаты предыдущих вычислений. Когда вычисляется оценка предсказания, наиболее сложные расчеты связаны с вычислением матрицы U_N, которые также могут быть и наименее точными. Можно предложить рекуррентный способ вычисления этой матрицы после получения очередного наблюдения. Имеет место рекуррентная формула, которую мы запишем для простоты в марковском случае,

$$U_N = \left(\sum_{t=2}^{N} Y_{i+1-t}^T Y_{i+1-t} \right)^{-1}.$$

$$U_{N+1} = \left(Y_i^T Y_i + \sum_{t=2}^{N} Y_{i+1-t}^T Y_{i+1-t} \right)^{-1} = U_N - \frac{U_N Y_i^T Y_i U_N}{1 + Y_i U_N Y_i^T} .$$

Оценка максимального правдоподобия матрицы B_{N+1} для $N + 1$ наблюдений принимает вид

$$B_{N+1} = \left(I - \frac{U_N Y_i^T Y_i}{1 + Y_i U_N Y_i^T} \right) B_N + \frac{U_N Y_i^T Y_{i+1}}{1 + Y_i U_N Y_i^T}.$$

Используя это выражение, оценку предсказания (4) можно написать тоже в рекуррентной форме. Для $n = 1$ эта оценка принимает вид

$$\hat{Y}_{i+2} = Y_{i+1} B_N + \frac{Y_{i+1} U_N Y_i^T \left(Y_{i+1} - \hat{Y}_{i+1} \right)}{1 + Y_i U_N Y_i^T} .$$

Для модели (12) рекуррентная форма оценки матрицы $B^{\mathrm{T}} = (B_1^{\mathrm{T}}\ B_2^{\mathrm{T}})$ и оценки предсказания (4) будет аналогичной, если вместо Y_i использовать $(Y_i\ Y_{i-1})$, вместо Y_{i+1} использовать $(Y_{i+1}\ Y_i)$ и матрицу U_N понимать так, как это определяется после формулы (12).

Пример. Рассмотрим данные для ставок доходности ценных бумаг Казначейства США на ноябрь 1995 г., представленные в табл. 1 раздела 5.2. Данные от 1 ноября до 27 ноября будут рассматриваться как выборочное множество наблюдений для предсказания значений ставок доходности на 28 ноября. Истинное значение ставки доходности для срока погашения 0,25 года равно 5,53%. Если мы используем марковскую модель только для данных срока погашения 0,25 года, мы получим оценку предсказания 5, 506 (см. пример раздела 5.2). Если мы используем двумерную марковскую модель с данными только для сроков погашения 0,25 и 0,5 лет, мы получим оценку предсказания 5, 507. Если же мы привлечем данные всех десяти сроков погашения, т. е. используем десятимерную марковскую модель, мы получим оценку предсказания 5,5301, или истинное значение ставки доходности на 28 ноября.

Второе выборочное множество образуется данными от 10 августа 1995 г. по 3 января 1996 г. (100 значений доходности), и предсказываемой величиной является доходность на 4 января 1996 г. ($n = 1$). Численные результаты предсказания представлены на рис. 1 в виде ошибок предсказания доходности для различных сроков до погашения и трех вариантов оценивания: тривиального предсказания (оценка равна тренду процесса доходности), предсказания с помощью модели AR(1) (марковский случай) и предсказания с помощью модели AR(2) (только в случае $m = p$).

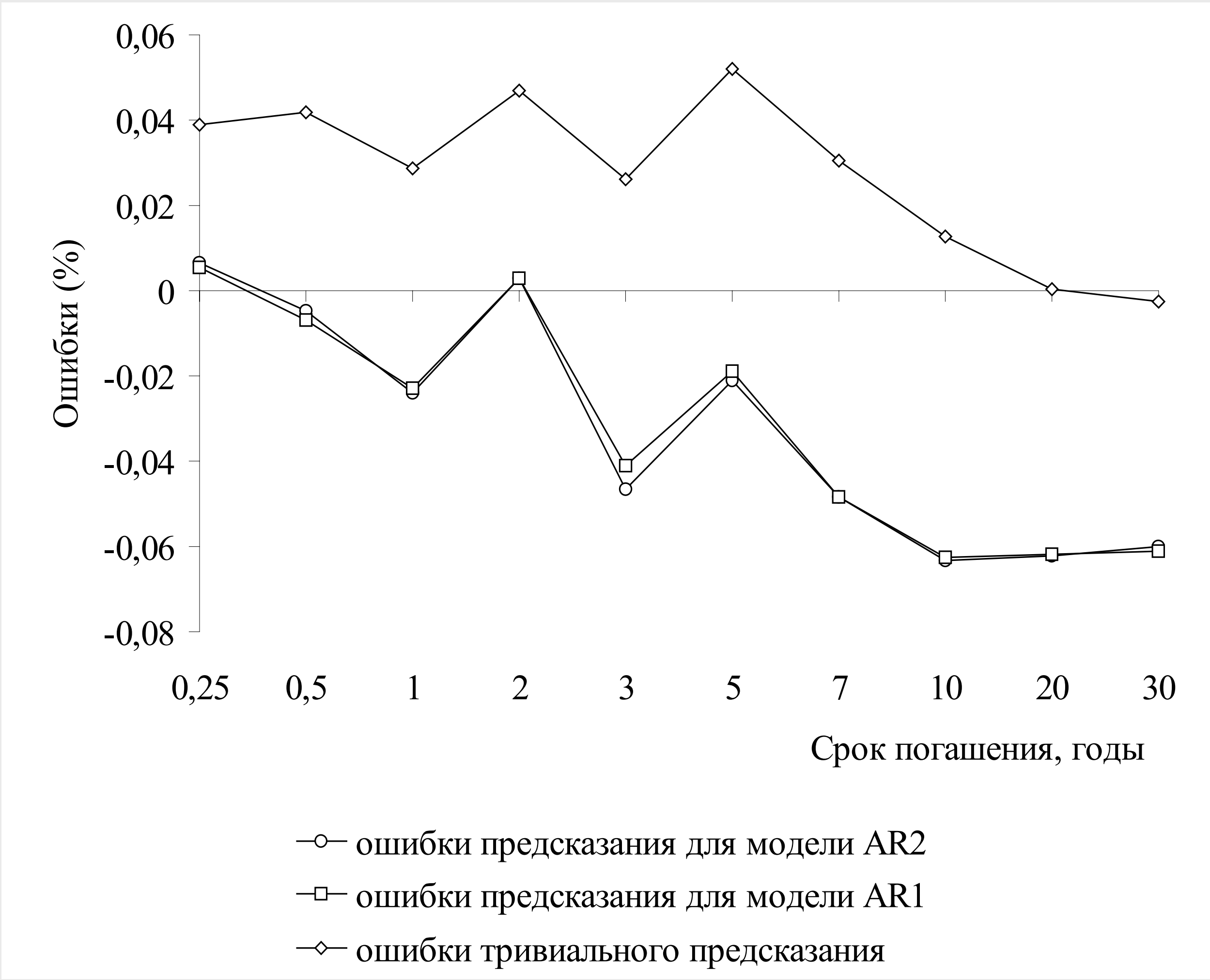


Рис. 1.

Для этого размера выборки точности предсказания с помощью скалярных и матричных моделей принимают практически одинаковое значение (ср. с результатами на рис. 1 в разделе 5.2). Интересно, что для больших значений сроков погашения (10, 20 и 30 лет) тривиальное предсказание оказалось более точным.

ПРИМЕНЕНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЦЕНЫ ОПЦИОНОВ

Инвестор, который хочет купить или продать опционы на фьючерсные контракты на казначейские билеты или облигации хотел бы знать наиболее точную цену опционов на фьючерсы за день (или несколько дней) до этого. Обычно для определения цены опционов используется модель Блэка определения цены опционов на фьючерсы. Эта модель предполагает наличие пяти параметров для вычисления цены опциона (см. раздел 1.1). Два из них, время истечения и цена исполнения (*strike price*), могут считаться известными. Третий параметр, цена фьючерсного контракта, может быть известен из данных предыдущего торгового дня. Оставшиеся два параметра, ставка доходности и ее волатильность, являются наиболее неопределенными, поскольку они порождаются случайным процессом ставки доходности. Этот случайный процесс рассматривался выше, и предсказанные значения доходности, а также ее дисперсия могут быть вычислены тем же самым путем, который был использован для построения доверительных интервалов. Используя эту информацию, инвестор, который собирается совершить сделку, может вычислить цену опциона на фьючерс утром делового дня до начала торговли.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

СТАНДАРТНЫЙ ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Случайный процесс $W(t)$ называется *стандартным винеровским процессом*, если он обладает следующими свойствами:

1. $W(t)$ имеет непрерывные траектории, то есть является непрерывным в среднеквадратическом смысле.
2. $W(0) = 0$.
3. $W(t)$ имеет независимые приращения, то есть для всяких $s < t \le u < v$ приращения $W(t) - W(s)$ и $W(v) - W(u)$ являются независимыми случайными величинами.
4. Для всяких $s < t$ приращение $W(t) - W(s)$ является случайной величиной, имеющей нормальное распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $t - s$.
5. С вероятностью единица траектории процесса $W(t)$ являются непрерывными функциями времени, которые не дифференцируемы в любой точке t.
6. Условное распределение $W(t)$ при заданном $W(s)$ для $s < t$ является нормальным со средним значением $W(s)$ и дисперсией $t - s$.

Заметим, что два последних свойства следуют из предыдущих.

Стандартный винеровский процесс иногда называют *процессом случайного блуждания* или *стандартным броуновским движением*. В финансовой литературе чаще всего используется последний термин. Характер изменения процесса во времени представлен на рис. 1.

Рассмотрим более подробно некоторые свойства стандартного винеровского процесса. Зафиксируем два момента времени s и t, $s < t$, и используем более удобные обозначения: $\Delta t = t - s$, $\Delta W(t) = W(t) - W(s)$. Из перечисленных выше свойств стандартного винеровского процесса легко получить следующие результаты:

$$E[\Delta W(t)] = 0 \qquad E[(\Delta W(t))^2] = \Delta t$$
$$\mathrm{Var}[\Delta W(t)] = \Delta t \qquad \mathrm{Var}[(\Delta W(t))^2] = 2(\Delta t)^2$$

Отсюда видно, что квадрат винеровских приращений $(\Delta W(t))^2$ имеет математическое ожидание, которое равно приращению времени Δt. Однако существенным фактом является то, что при малых приращениях времени Δt дисперсия $(\Delta W(t))^2$ является пренебрежимо малой по сравнению со своим математическим ожиданием. Другими словами, когда Δt стремится к нулю, $(\Delta W(t))^2$, конечно, тоже стремится к нулю, но дисперсия будет приближаться к нулю гораздо быстрее, чем математическое ожидание. Таким образом при уменьшении Δt квадрат $(\Delta W(t))^2$ будет выглядеть все более и более «детерминированным» и мы должны принять, что в пределе становится справедливым формальное равенство

$$(\Delta W(t))^2 = dt \,. \tag{1}$$

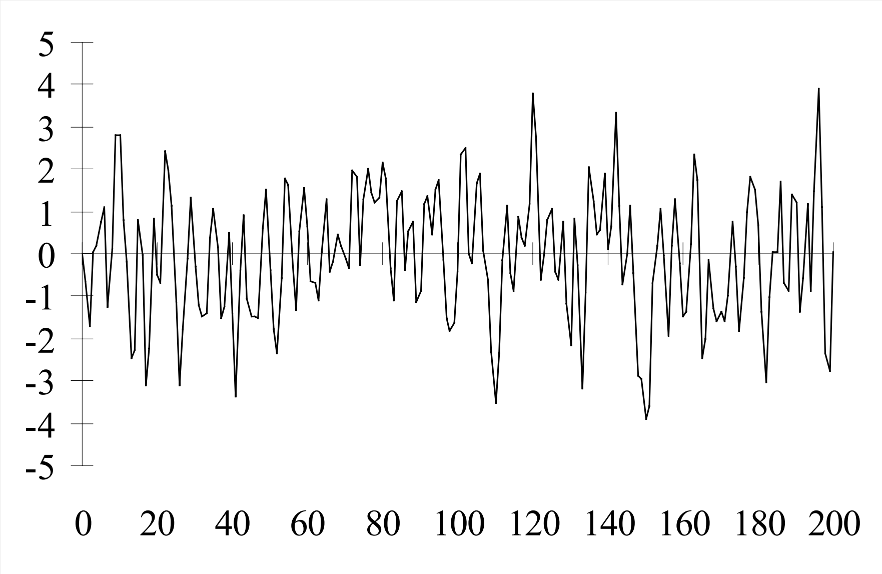


Рис. 1. Типичная реализация процесса броуновского движения

Наши рассуждения были чисто эвристическими. Строгое математическое доказательство этого равенства является очень сложным и здесь не приводится. Оно будет приниматься на веру и использоваться позже для обоснования других важных свойств процессов с независимыми приращениями.

Обычным (не стандартным) процессом броуновского движения $X(t)$ является процесс, приращения которого связаны с приращениями стандартного процесса $W(t)$ соотношением $(\Delta X(t) - \mu \Delta t) / \sigma = \Delta W(t)$, или

$$\Delta X(t) = \mu\, \Delta t + \sigma\, \Delta W(t),$$

где параметры μ и σ определяют математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t)$, соответственно. Этот процесс является наиболее простым представителем процессов с независимыми приращениями.

В общем случае приращения процесса $X(t)$ можно определить соотношением

$$\Delta X = \mu\,(X(t), t)\, \Delta t + \sigma\,(X(t), t)\, \Delta W(t)\,,$$

откуда, переходя к пределу $\Delta t \to dt$, получаем стохастическое дифференциальное уравнение для процесса с независимыми приращениями :

$$dX = \mu(X(t), t)\, dt + \sigma(X(t), t)\, dW(t)\,, \quad X(0) = X_0\,. \tag{2}$$

Стохастические дифференциальные уравнения для процессов с независимыми приращениями принято писать в форме дифференциалов, поскольку, как было выше сказано, процесс $W(t)$ является не дифференцируемым.

АРИФМЕТИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ: $dX = \mu\, dt + \sigma\, dW$

Пусть $\mu(X, t) = \mu$ и $\sigma(X, t) = \sigma$ – две константы. Тогда говорят, что процесс X следует арифметическому броуновскому движению с *дрейфом* μ и *волатильностью* σ. Процесс описывает реальные экономические показатели, которые растут с линейной скоростью и проявляют увеличивающуюся неопределенность. Отметим следующие свойства такого процесса X:

1. X может быть положительным или отрицательным.
2. Если $u > t$, то $X(u)$ является будущим значением процесса по отношению к моменту t. Распределение $X(u)$ при заданном $X(t)$ является нормальным со средним $X(t) + \alpha\,(u - t)$ и стандартным отклонением $\sigma\sqrt{(u-t)}$.
3. Дисперсия предсказания (прогноза) процесса $X(u)$ стремится к бесконечности с ростом u (при заданных t, $X(t)$).

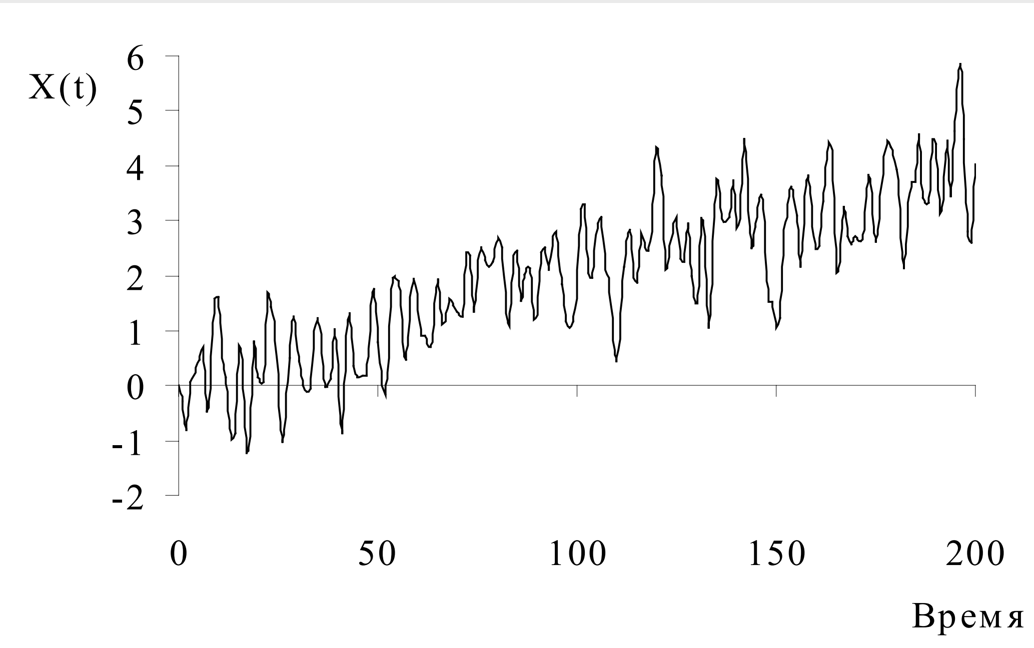


Рис. 2. Арифметическое броуновское движение.
Дрейф равен 0,02; волатильность равна 0,5.

Эти три свойства показывают, что арифметическое броуновское движение описывает показатели, которые могут становиться положительными или отрицательными, имеют нормально распределенные ошибки предсказания и имеют дисперсию предсказания, которая увеличивается линейно во времени. Например, этот процесс может служить математической моделью потока платежей.

Рис. 2 демонстрирует выборочную траекторию арифметического броуновского движения с положительным дрейфом $(\mu > 1)$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ: $dX = \alpha X\, dt + \sigma X\, dW$

Пусть $\mu(X, t) = \mu X$ и $\sigma(X, t) = \sigma X$. Тогда говорят, что процесс X следует геометрическому броуновскому движению с дрейфом μ и волатильностью σ. Процесс соответствует экономическим показателям, которые растут экспоненциально со средней скоростью μ и имеют волатильность, пропорциональную значению самого процесса. Процесс также проявляет увеличивающуюся неопределенность предсказания.

Приведем следующие свойства процесса X, отметив при этом, что если X стартует с положительного значения, он будет оставаться положительным.

1. X имеет поглощающий барьер в нуле: таким образом, если X достигает нуля (событие нулевой вероятности), то X будет оставаться нулевым.
2. Условное распределение $X(u)$ при заданном $X(t)$ является логарифмически нормальным (логнормальным). Условное среднее $\ln\big(X(t)\big)$ для $u > t$ равно $\ln\big(X(t)\big) + \alpha(u - t) - 0{,}5\sigma^2(u - t)$ и условное стандартное отклонение $\ln\big(X(t)\big)$ равно $\sigma\sqrt{(u-t)}$. $\ln\big(X(t)\big)$ является нормально распределенным. Условное ожидаемое значение $X(u)$ равно $X(t)\exp[\alpha(u - t)]$.
3. Дисперсия предсказания $X(u)$ неограниченно увеличивается с ростом u.

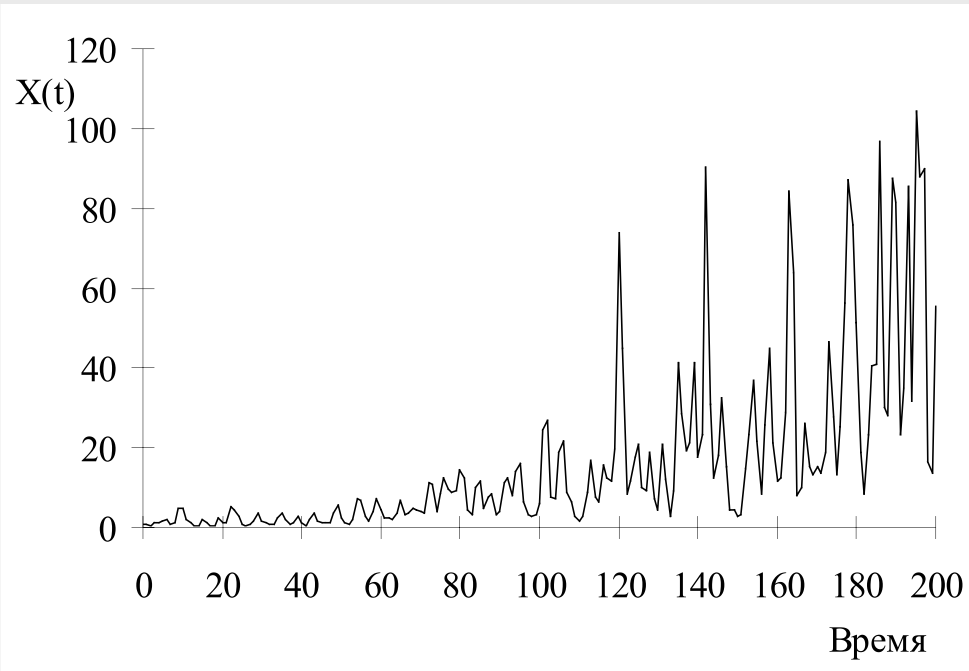


Рис. 3. Геометрическое броуновское движение. Коэффициенты дрейфа и волатильности такие же, как у процесса, представленного на рис. 2.

Геометрическое броуновское движение часто используется для моделирования стоимости активов, так как пропорциональные изменения цены активов являются независимыми и одинаково нормально распределенными. Оно может быть также использовано для моделирования процессов, которые являются положительными и увеличиваются (в среднем) с постоянной экспоненциальной скоростью. Например, можно применять геометрическое броуновское движение для моделирования номинальной цены товаров потребления или доходов от конкретной деятельности. В некоторых случаях также желательна отрицательная скорость изменения положительной переменной. Геометрическое броуновское движение тоже может быть использовано. Для моделирования процесса, изображенного на рис. 3 использован тот же самый процесс $W(t)$, который использовался для рис. 2, чтобы продемонстрировать, как может выглядеть соответствующее ему геометрическое броуновское движение.

ПРОЦЕСС, ВОЗВРАЩАЮЩИЙСЯ К СРЕДНЕМУ: $dX = k\,(\mu - X)\,dt + \sigma X^{\gamma}\,dW$

Процесс, возвращающийся к среднему, называется также процессом Орнштейна –Уленбека, когда $\gamma = 0$. Пусть $\mu(X, t) = k\,(\mu - X)$ и $\sigma(X, t) = \sigma X^{\gamma}$, где $k \geq 0$ и γ является произвольными. Тогда говорят, что процесс X следует процессу возвращения к среднему с параметром регулирования скорости k, средним установления μ и волатильностью σ. Выбор γ дает возможность изменять характер волатильности процесса. Этот процесс является подходящим для описания экономических показателей, которые имеют тенденцию устанавливаться к среднему значению, но могут быть подвержены краткосрочным возмущениям. Мы предположим, что k, μ и γ являются положительными. Процесс имеет следующие свойства:

1. X является положительным для положительных стартовых значений.
2. Когда X достигает 0, дрейф становится положительным и волатильность исчезает.
3. Когда u становится неограниченным, дисперсия предсказания $X(u)$ является конечной.
4. Если $\gamma = 0$, распределение $X(u)$ при заданном $X(t)$ для $u > t$ является нормальным ; при этом условное среднее распределения равно

   $$\big(X(t) - \mu\big) \exp[-\,k(u - t)] + \mu$$

   и условная дисперсия равна

   $$[\sigma^2/(2k)](1 - \exp[-\,2k(u - t)]).$$

   (Подробный анализ этого случая см. разделе 2.1.)

5. Если $\gamma = 0{,}5$, распределение $X(u)$ при заданном $X(t)$ для $u > t$ является нецентральным χ^2; среднее распределения равно

$$(X(t) - \mu)\exp[-k(u-t)] + \mu$$

и дисперсия распределения равна

$$X(t)\frac{\sigma^2}{k}\left(e^{-k(u-t)} - e^{-2k(u-t)}\right) + \mu\frac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-k(u-t)}\right)^2.$$

(более подробное описание см. в разделе 2.2).

Процесс, возвращающийся к среднему, является подходящим для описания процентных ставок или индексов инфляции, которые могут иметь устойчивые установившиеся значения, и не подходит для торгуемых активов. Можно также моделировать саму волатильность (если волатильность изменяется непредсказуемо) как процесс, возвращающийся к среднему. Процесс, возвращающийся к среднему при $\gamma = 0{,}5$, может выглядеть подобно представленному на рис. 4, где использован тот же самый процесс $W(t)$, что и на рис. 2 и 3.

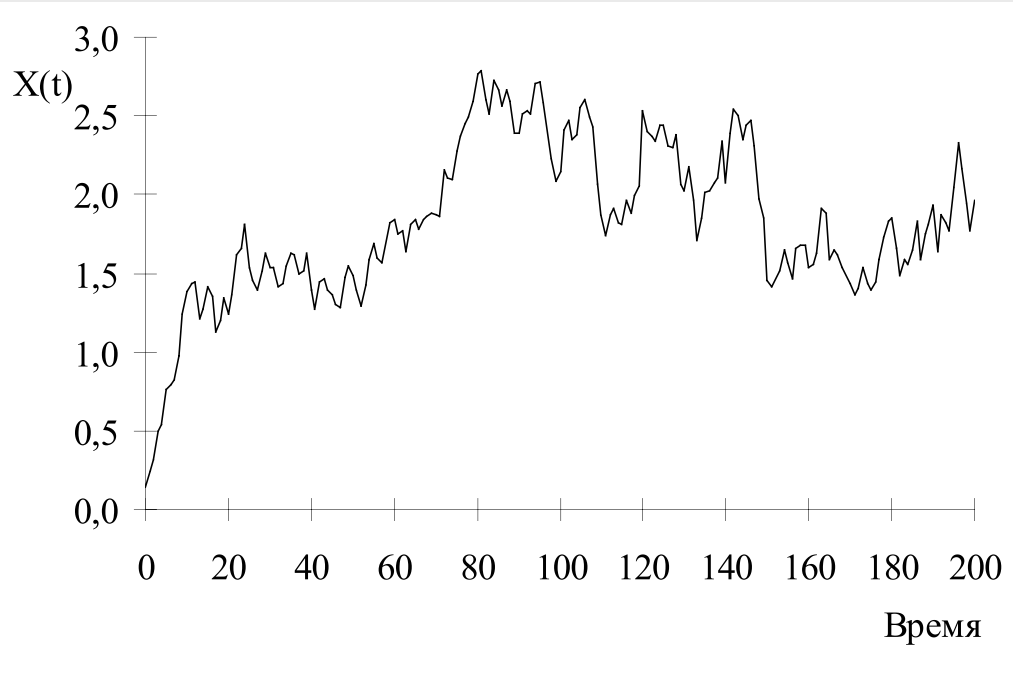


Рис. 4. Процесс, возвращающийся к среднему.
$\gamma = 0{,}5$; $k = 0{,}7$; $\mu = 2$; $\sigma = 0{,}1$

ФОРМУЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ИТО

Рассмотрим вещественную функцию $f(X)$, отображающую значения случайного процесса с независимыми приращениями на числовую ось. Мы полагаем, что случайный процесс $X(t)$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению (2), приведенному выше. Используя разложение в ряд Тэйлора, найдем приращение этой функции за достаточно малый промежуток времени длительностью Δt :

$$\Delta f(X) = f(X(t+\Delta t)) - f(X(t)) = f(X(t) + \Delta X(t)) - f(X(t)) =$$

$$= \frac{df}{dX}\Delta X + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}(\Delta X)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dX^3}(\Delta X)^3 + \ldots$$

Устремим длительность временного промежутка к dt и ограничимся в полученном разложении приращения функции $\Delta f(X)$ членами порядка малости $O(dt)$, учитывая вид приращений процесса X , выражаемый уравнением (2). Тогда получим

$$df(X) = \frac{df}{dX}dX + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}(dX)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3 f}{dX^3}(dX)^3 + \ldots$$

В этой формуле

$$dX = \mu\,(X(t), t)\,dt + \sigma\,(X(t), t)\,dW(t)\ ,$$

$$(dX)^2 = \sigma^2(X(t), t)\,(dW(t))^2 + o(dt) = \sigma^2(X(t), t)\,dt + o(dt)\ ,$$

$$(dX)^3 = o(dt)\ ,$$

где учтено свойство винеровских приращений (1). Подставляя эти выражения в формулу для $df(X)$ и пренебрегая членами порядка $o(dt)$, получим

$$df(X) = \left(\frac{df}{dX}\mu\left(X,t\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}\sigma^2\left(X,t\right)\right)dt + \frac{df}{dX}\sigma\left(X,t\right)dW\left(t\right). \qquad (3)$$

Поскольку аргументом функции $f(X)$ является случайный процесс, эта функция сама становится случайным процессом и полученное выражение может рассматриваться как стохастическое дифференциальное уравнение для этого случайного процесса. Если аргументами функции f являются не только значения процесса X , но и время t , тогда аналогичные рассуждения приводят к уравнению

$$df(X,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial X}\mu\left(X,t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\sigma^2\left(X,t\right)\right)dt + \frac{\partial f}{\partial X}\sigma\left(X,t\right)dW\left(t\right).$$

Полученные выражения называются формулами (или правилами) дифференцирования Ито и широко применяются при анализе стохастического поведения процентных ставок и цен активов, зависящих от этих ставок. Распространение этих формул на многомерный случай (когда переменная X считается многомерной) является достаточно очевидным. Нужно только рассматривать частные производные по X, как производные по многомерной переменной.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Здесь рассматриваются решения нескольких типов дифференциальных уравнений, которые встречаются при анализе стохастического поведения процентных ставок и цен активов, зависящих от этих ставок. Будем считать, что поведение ставок и цен описывается стохастическим дифференциальным уравнением соответствующего процесса $X(t)$. Для простоты мы будем использовать укороченные обозначения производных, обозначая их индексами. Количество индексов говорит о порядке производной. Функция f будет иметь смысл некоторой стоимости, поэтому мы будем сразу предполагать, что коэффициенты уравнений принимают значения из той или иной оговариваемой области значений.

СЛУЧАЙ 1

В случае, когда X следует арифметическому броуновскому движению и $f = f(X)$, может быть получено следующее дифференциальное уравнение для стоимости $f(X)$:

$$a f_{XX} + b f_X + c f = X d + e,$$

где a, b, c, d и c являются константами. Обычно $a > 0$, $c < 0$, $d < 0$ и $e < 0$. Поэтому $b^2 - 4ac$ будет обычно положительным. Решение этого уравнения дается в виде

$$f(X) = A_1 \exp(k_1 X) + A_2 \exp(k_2 X) + Xd/c + (ec - bd)/c^2$$

где

$$k_{1,2} = \left[-b \pm \sqrt{\left(b^2 - 4ac\right)}\right] \Big/ (2a) \quad , \; k_1 > k_2 .$$

Заметим, что если $ac < 0$, тогда $k_1 > 0 > k_2$. Значения A_1 и A_2 определяются из граничных условий. Часто при $X \to \infty$ величина f_X должна быть ограниченной; если это имеет место и $ac < 0$, то $A_1 = 0$. Если при $X \to \infty$ (и $ac < 0$) или $|V(x)| < \infty$, или $|V_X(x)| < \infty$, тогда $A_2 = 0$.

СЛУЧАЙ 2

В случае, когда X следует геометрическому броуновскому движению и $f = f(X)$, может быть получено следующее дифференциальное уравнение для стоимости $f(X)$:

$$aX^2 f_{XX} + bXf_X + cf = Xd + e.$$

Решение дается выражением:

$$f(X) = A_1 X^{\gamma_1} + A_2 X^{\gamma_2} + \frac{Xd}{b+c} + \frac{e}{c},$$

где $\gamma_{1,2} = \left[(a-b) \pm \sqrt{(b-a)^2 - 4ac}\right] \Big/ (2a)$, $\gamma_1 > \gamma_2$. Если $ac < 0$, тогда $\gamma_1 > 0 > \gamma_2$. Если $a > 0$ и если $a + b < 0$ или $-c > b$, тогда $\gamma_1 > 1$. Значения A_1 и A_2 определяются из граничных условий. Если при $X \to \infty$ величина f_X должна быть ограниченной и $\gamma_1 > 1$, тогда $A_1 = 0$. Если $e = 0$ и $f(0) = 0$, тогда $A_2 = 0$.

Пример. Предположим, что X следует геометрическому броуновскому движению с дрейфом α и волатильностью σ. Ценная бумага стоимости f обеспечивает постоянно сумму Xdt. Стоимость f представляет бессрочный аннуитет, который растет со средней экспоненциальной скоростью α. Экономика является нейтральной к риску, и свободная от риска процентная ставка постоянна и равна r. Предположим, что мы не имеем никакого предположения относительно стоимости ценной бумаги $f(X)$. Граничные условия требуют ограниченных производных при $X \to \infty$ и $f(0) = 0$, так как, когда X достигает 0, стоимость обращается в ноль и никакого потока платежей от ценной бумаги не происходит. Получаемое дифференциальное уравнение имеет вид

$$(1/2)\sigma^2 X^2 f_{XX} + \alpha X f_X - rf = -X.$$

Поэтому условия случая 2 удовлетворяются при $a = (1/2)\sigma^2$, $b = \alpha$, $c = -r$, $d = -1$ и $e = 0$. Решение дается в виде

$$f(X) = A_1 X^{\gamma_1} + A_2 X^{\gamma_2} + \frac{Xd}{b+c} + \frac{e}{c},$$

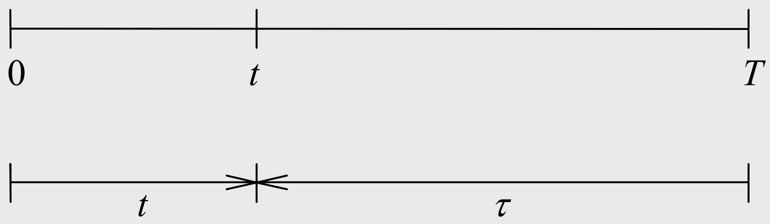
так как $f(0) = 0$, $A_2 = 0$. Если бы этого не было, $f(X)$ становилось бы неограниченным когда $X \to 0$, так как $\gamma_2 < 0$. Также, поскольку f_X является ограниченной, $A_1 = 0$, если $\gamma_1 > 1$, что имеет место, если $\sigma > 0$ и $r > \alpha$. После упрощения мы имеем

$$f(x)=\frac{Xd}{b+c}=\frac{-X}{\alpha-r}=\frac{X}{r-\alpha}\ .$$

ОДНОРОДНЫЕ ПО ВРЕМЕНИ СЛУЧАИ : $f = f(X,\tau)$

Чаще всего актив выпускается на ограниченный срок действия τ, и, когда он истекает, актив имеет детерминированную стоимость, равную $f(X,0) = mX + n$. Например, аннуитет истекает, ничего не стоя в дату своего истечения, но форвардный контракт имеет ту же самую стоимость, что и денежный контракт на дату истечения.

Часто удобно использовать обратный ход времени и вести расчеты от τ к 0 вместо естественного от 0 до T, как показано ниже:



Это подразумевает, что $\tau = T - t$, где τ – время до истечения, T – фиксированная дата истечения, а t – текущее время. Также очевидно, что $dt = -d\tau$, что дает нам возможность считать для любой стоимости актива f, что частная производная $f_t = -f_\tau$. Мы будем часто использовать эту замену при применении леммы Ито.

Условие завершения в календарном времени является начальным условием, измеряемым временем до погашения. Ниже показано, как оценить актив с конечным сроком действия, когда X следует арифметическому или геометрическому броуновскому движению; стоимость актива при завершении предполагается равной $f(X,0) = mX + n$

Некоторые сведения по преобразованиям Лапласа

Когда функция f явно зависит не только от основного процесса X, но и от времени, приходится обращаться к уравнениям в частных производных (УЧП). Для их решения иногда удобно использовать преобразования Лапласа. По определению, если $f(X,\tau)$ является функцией переменной X и времени τ, то ее преобразование Лапласа $L_q\{f(X,\tau)\}$ дается в виде

$$L_q\{f(X,\tau)\}=\int_0^\infty e^{-qs}f(X,s)ds\,.$$

Правая часть похожа на дисконтированное настоящее значение непрерывного потока платежей $f(X,\tau)$ при ставке q. Это преобразование устраняет время в функции (т.е. $f(X,\tau)$ преобразуется в $g(X)$) и в некоторых случаях делает более легким решение УЧП.

Пусть $g(X) \equiv L_q\{f(X,\tau)\}$. При использовании преобразования функции $f(X,\tau)$ являются важными следующие свойства $g(X)$:

1. Любая частная производная преобразования функции равна преобразованию частной производной, исключая производную по времени. Это применимо также ко вторым частным производным :

$$g_X(X) \equiv L_q\{f_X(X,\tau)\} \; .$$

Свойство может быть легко доказано применением правила Лейбница для дифференцирования под знаком интеграла.

2. Преобразование Лапласа производной по времени (время = времени до погашения) выражается в виде:

$$L_q\{f_\tau(X,\tau)\} = qL_q\{f(X,\tau)\} - f(X,0) \; .$$

Второй член в разности равен окончательной стоимости ценной бумаги.

3. Преобразование Лапласа является линейным оператором

$$L\{af(X,\tau) + bg(X,\ \tau)\} = aL\{f(X,\tau)\} + bL\{g(X,\tau)\} \; .$$

Это применяется также и к инверсии преобразования Лапласа. Названные три свойства помогают успешно манипулировать преобразованиями Лапласа. Как только упрощенное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) для $g(X)$ решено, по таблицам преобразований Лапласа можно находить обратное преобразование $f(X,\tau)$, являющееся стоимостью актива.

СЛУЧАЙ 3

В случае, когда X следует арифметическому броуновскому движению и $f = f(X,\tau)$. может быть получено следующее дифференциальное уравнение для стоимости $f(X,\tau)$:

$$af_{XX} + bf_X + cf - f_\tau = Xd + e\ ; \qquad f(X,0) = \ mX + n\ .$$

Пусть $h(X) = L_s\{f(X,\tau)\}$ представляет преобразование Лапласа f с параметром s . Тогда должно удовлетворяться следующее уравнение :

$$ah_{XX} + bh_X + (c - s)h = X(d - ms)/s + (e - ns)/s\ .$$

Это следует из свойств преобразований Лапласа. Преобразования устраняют производную по времени из УЧП.

В случае 1 мы имеем

$$h = A_1 \exp(k_1 X) + A_2 \exp(k_2 X) + X(d - ms)/[s(c-s)] +$$

$$+ (e - ns)/[s(c-s)] - b(d - ms)/[s(c-s)^2] ,$$

где

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\left\{b^2 - 4a(c-s)\right\}}}{2a} , \quad k_1 > k_2 .$$

Мы обычно предполагаем (если $a > 0$), что s является достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $a(c-s) < 0$, и, следовательно, $k_1 > 0 > k_2$.

Значения A_1 и A_2 определяются из граничных условий на $h(X)$. Чтобы найти значение f, мы должны обратить $h(X)$, используя таблицы преобразований Лапласа. Заметим, что A_1 и A_2 часто зависят от s; это может затруднить обращение. Во многих случаях такие выражения следует разложить на сумму простых дробей. Если это возможно, линейность обратного преобразования позволяет найти обратное преобразование каждой компоненты отдельно и сложить (или вычесть) их.

СЛУЧАЙ 4

В случае, когда X следует геометрическому броуновскому движению и $f = f(X,\tau)$, может быть получено следующее дифференциальное уравнение для стоимости $f(X,\tau)$:

$$aX^2 f_{XX} + bXf_X + cf - f_\tau = Xd + e ; \qquad f(X,0) = mX + n .$$

Пусть $h(X) = L_s\{f(X,\tau)\}$ представляет преобразование Лапласа f с параметром s. Тогда должно удовлетворяться следующее уравнение:

$$aX^2 h_{XX} + bXh_X + (c-s)h = X(d - ms)/s + (e - ns)/s ,$$

и из случая 2 мы имеем

$$h(X) = A_1 X^{\gamma_1} + A_2 X^{\gamma_2} + \frac{X(d-ms)}{s(b+c-s)} + \frac{e - ns}{s(c-s)} ,$$

где

$$\gamma_{1,2} = \left[(a-b) \pm \sqrt{(b-a)^2} - 4a(c-s)\right] \Big/ (2a) , \quad \gamma_1 > \gamma_2 .$$

Снова предположим (когда $a > 0$), что s достаточно велико, чтобы обеспечить неравенство $a(c - s) < 0$, тогда $\gamma_1 > 0 > \gamma_2$.

Значения A_1 и A_2 определяются из граничных условий на h, которые могут отличаться от граничных условий на f. Чтобы найти значение f, мы должны обратить h, используя таблицы преобразований Лапласа.

Пример. Рассмотрим снова предыдущий пример, но предположим наличие потока платежей только на последнем периоде τ. Тогда $f(X,0) = 0$, когда срок действия актива истекает. Мы можем применить случай 4, придавая следующие значения параметрам: $a = 0{,}5\sigma^2$, $b = \alpha$, $c = -r$, $m = 0$, $n = 0$, $d = -1$, $e = 0$. Решение для преобразования Лапласа имеет вид:

$$h(X) = A_1 X^{\gamma_1} + A_2 X^{\gamma_2} + \frac{X}{s(r - \alpha + s)} .$$

Поскольку производная является ограниченной, то $A_1 = 0$. При $X = 0$ преобразование Лапласа равно нулю, т. е. $h(0) = 0$, так что $A_2 = 0$. Используя обратное преобразование:

$$\text{если } f(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} \quad (a < b)\text{, то } F(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} ,$$

мы имеем :

$$h = X / [(s + a)(s + b)] \quad \text{при } a = 0 \text{ и } b = r - \alpha .$$

(использованные в этом месте обозначения a и b выбираются только для соответствия с формулой преобразования и не связаны с предыдущими определениями a и b.) Инвертируя h, мы находим :

$$f(X, \tau) = X\,[1 - \exp\{-(r - \alpha)\tau\}] \,/\, (r - \alpha) .$$

Поэтому f является настоящей стоимостью аннуитета с начальным уровнем X и темпом роста α, дисконтированным при ставке r, свободной от риска.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РИККАТИ

При анализе аффинных моделей временной структуры процентных ставок встречается нелинейное дифференциальное уравнение, известное под названием уравнение Риккати. Приведем некоторые сведения о его решении. Общий вид этого уравнения относительно некоторой функции $b(\tau)$ сводится к следующему:

$$\frac{db}{d\tau} = P(\tau)b^2(\tau) + Q(\tau)b(\tau) + R(\tau) \ .$$

В общем случае это дифференциальное уравнение в квадратурах неразрешимо. Однако иногда решение все же может быть получено в явном виде. Перейдем к новой функции $z(\tau)$ при помощи следующей замены переменной

$$b(\tau) = -\frac{1}{P(\tau)z(\tau)}\frac{dz}{d\tau},$$

тогда уравнение Риккати приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно $z(\tau)$:

$$P(\tau)\frac{d^2z}{d\tau^2} - \left(\frac{dP}{d\tau} + P(\tau)Q(\tau)\right)\frac{dz}{d\tau} + R(\tau)P^2(\tau)z(\tau) = 0.$$

Приведем решение этого уравнения для случая постоянных коэффициентов P , Q , R : $P = 1$, $Q = -\lambda - k$, $R = -\sigma^2/2$; и начального условия $b(0) = 0$. Решение уравнения для функции $z(\tau)$ имеет вид

$$z(\tau) = A_1 \exp(u_1\tau) + A_2 \exp(u_2\tau) ,$$

где $u_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения $u^2 - (\lambda+k)u - (\sigma^2/2) = 0$, т. е. $u_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\lambda + k \pm \sqrt{(\lambda+k)^2 + 2\sigma^2}\right)$, следовательно,

$$b(\tau) = \frac{2}{\sigma^2 z(\tau)}\frac{dz}{d\tau} = \frac{2}{\sigma^2}\frac{A_1u_1e^{u_1\tau} + A_2u_2e^{u_2\tau}}{A_1e^{u_1\tau} + A_2e^{u_2\tau}} \ , \quad b(0) = 0.$$

Из начального условия следует, что $A_1 u_1 = - A_2 u_2$. Поэтому явный вид решения с учетом того, что $u_1 u_2 = -(\sigma^2/2)$, принимает форму

$$b(\tau) = \frac{e^{(u_1-u_2)\tau} - 1}{u_1 - u_2 - u_2\left(e^{(u_1-u_2)\tau} - 1\right)} \ .$$

Наконец, если обозначить $\varepsilon = \sqrt{(k+\lambda)^2 + 2\sigma^2}$, получим

$$b(\tau) = \frac{2\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)}{2\varepsilon + (k + \lambda + \varepsilon)\left(e^{\varepsilon\tau} - 1\right)} \ .$$

ЛИТЕРАТУРА

Black F., *Karasinski P.* Bond and option pricing when short rates are lognormal // financial Analysts Journal. – 1991. – p. 52 – 59.

Black F., *Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. - 1973. - Vol. 81. - p. 637 – 654.

Bjork T. Arbitrage theory in continuous time. – Stockholm: Stockholm School of Economics, 1995.- 120 p.

Cox J., Ingersoll J., Ross S. A theory of the term structure of interest rates // Econometrica. - 1985. - Vol. 53, № 2. - p. 385 – 407.

Heath D., *Jarrow R.*, *Morton A.* Bond pricing and the term structure on interest rates: a new methodology for contingent claims valuation // Econometrica. – 1992. - Vol. 60, № 1. p. 77 – 105.

Ho T.S.Y., *Lee S.-B.* Term structure movements and pricing interest rate contingent claims // Journal of Finance. – 1986. - Vol. 41, № 5. - p. 1011 – 1029.

Hull J. C. Options, futures, and other derivative securities. – Englewood Clifs: Prentice Hall, 1993.- 492 p.

Hull J., *White A.* One - factor interest - rate models and the valuation of interest - rate derivative securities // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1993. - Vol. 28, № 2. p. 235 – 254.

Medvedev G. A., *Cox S. H.* The market price of risk for affine interest rate term structures: Proceedings of the 6-th International AFIR Symposium.- Nuremberg, 1996 - p. 913 – 924.

Medvedev G. A. On estimates of yield rate parameters and spot rate parameters by yield curves: Proceedings of the 5-th International Conference CDAM'98. Vol. 1. - Minsk, 1998. - p. 181 – 190.

Medvedev G. A. On fitting the autoregressive investment models to real financial data: Transactions of the 26-th International Congress of Actuaries.- Birmingham, 1998. - p. 187 – 211.

Medvedev G. A. On some mathematical models of real financial time series, Springer Lecture Notes, 1999.

Merton R. C. Theory of rational option pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. - 1973. - Vol. 4. - p. 141 – 183.

Mihlstein G. N. Approximate integration of stochastic differential equations // Theory Probability Applications. – 1974. – Vol. 19. – p. 557 – 562.

Rendleman R., *Bartter B.* The pricing of options on debt securities // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1980. – Vol. 15. – p. 11 – 24.

Richard S. F. An arbitrage model of the term structure of interest rate // Journal of Financial Economics. - 1978. - Vol. 6. - p. 33 – 57.

Shimko D. C. Finance in continuous time. – Miami: Kolb Publishing Company, 1992.- 109 p.

Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. – 1977. - Vol. 5. - p. 177 – 188.

Wilkie A. D. A stochastic investment model for actuarial use: Transactions of Faculty of Actuaries. - 1986. - Vol. 39.- p. 341 – 403.

ОГЛАВЛЕНИЕ